



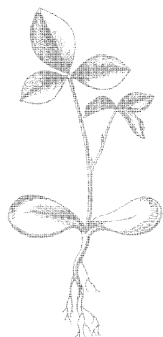
Сборник задач по физике



Сборник задач по физике

Под редакцией
С. М. КОЗЕЛА

*Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для слушателей
подготовительных отделений
высших учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.3
С 23
УДК 53

Авторы:

Л. П. БАКАНИНА, В. Е. БЕЛОНУЧКИН,
С. М. КОЗЕЛ, И. П. МАЗАНЬКО

Сборник задач по физике: Учебное пособие / Баканина Л. П., Белонучкин В. Е., Козел С. М., Мазанько И. П.; Под ред. Козела С. М. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 288 с.

Сборник содержит более 850 задач по физике в основном из числа предлагавшихся на вступительных экзаменах в Московском физико-техническом институте. Наряду с задачами повышенной трудности в сборник включены и более простые задачи, рассчитанные на менее подготовленного читателя и предназначенные для первоначального ознакомления с методикой решения задач. Большинство задач сопровождаются решениями или пояснениями. Вместе с тем ряд задач оставлен для самостоятельного разбора.

Для слушателей подготовительных отделений вузов, лиц, самостоятельно готовящихся к поступлению в вузы физического профиля; может быть использована в работе физико-математических школ и школьных физических кружков, а также служить дополнительным пособием для студентов педагогических вузов и преподавателей физики в средних школах.

Рис. 466.

ОТ РЕДАКТОРА

В настоящий сборник вошло более 850 задач по физике в основном из числа предлагавшихся на приемных экзаменах в Московском физико-техническом институте. Некоторое количество задач (около 20) предлагалось на республиканских и все-союзных школьных физических олимпиадах. Авторы, принимавшие участие в составлении и подборе задач, заново отредактировали и привели в систему этот обширный материал.

Следуя традиции издававшегося ранее сборника*), авторы пытались подобрать задачи, решение которых требует не просто механической подстановки исходных данных в готовые уравнения, а прежде всего осмысливания самого явления, описанного в условии задачи, и свободного владения физическими законами, изучаемыми в средней школе. Это, по мнению авторов, должно способствовать не только развитию навыков решения задач, но и более глубокому усвоению теории.

При составлении сборника отдано предпочтение задачам, приближенным к практике, родившимся под влиянием эксперимента. В этих задачах рассматриваются не идеализированные системы, а реальные физические объекты. Важным этапом решения задач такого рода, характерным для любого научного исследования, является выбор той или иной физической модели. Ряд задач, вошедших в книгу, носят оценочный характер. Они должны способствовать развитию физического мышления и ощущению масштабов физических величин и явлений. В сборнике имеется небольшое число задач, не претендующих на оригинальность, но представляющих общефизический интерес.

Для решения задач, собранных в настоящем издании, требуются знания в объеме программы средней школы. Сборник содержит задачи различного уровня трудности, хотя в целом в нем довольно много сложных задач. На приемных экзаменах в МФТИ и другие высшие учебные заведения физического профиля поступающим наряду с задачами повышенной трудности предлагаются и простые, элементарные задачи по физике. Они также включены в эту книгу.

Многие задачи авторы снабдили решениями или подробными указаниями. Вместе с тем было признано целесообразным в ряде случаев ограничиться приведением только окончательных ответов.

*) Сборник задач по физике / Баканина Л. П., Белонучкин В. Е., Козел С. М. и др. — 3-е изд. — М.: Наука, 1975.

Такие задачи оставлены для самостоятельной работы. При составлении указаний и решений главное внимание уделялось принципиальным вопросам, связанным с применением физических законов к решению конкретных задач. Второстепенные моменты рассуждений, как правило, опущены.

Предлагаемое пособие в основном предназначено для лиц со средним образованием, самостоятельно готовящихся к поступлению в высшие учебные заведения физического профиля. Оно может быть использовано в работе школьных физических кружков и физико-математических школ, а также при подготовке участников физических олимпиад. Сборник будет служить полезным дополнительным пособием для студентов педагогических вузов и преподавателей физики в средних школах.

Авторы выражают благодарность всем преподавателям кафедры физики МФТИ, принимавшим участие в составлении и обсуждении задач, собранных в настоящей книге, в особенности Е. П. Кузнецову, В. В. Можаяеву, В. Е. Скороварову, А. В. Шелагину, А. А. Шеронову.

Авторы признательны рецензентам книги И. Е. Иродову и Е. И. Бутикову за ряд ценных замечаний и советов, способствовавших улучшению сборника.

С. М. Козел

ЗАДАЧИ

I. МЕХАНИКА

Кинематика

1.1. За последнюю секунду свободно падающее без начальной скорости тело пролетело $3/4$ всего пути. Сколько времени падало тело?

1.2. Из точки A , лежащей на верхнем конце вертикального диаметра некоторой окружности, по желобам, установленным вдоль различных хорд этой окружности (рис. 1.1), одновременно начинают скользить грузы. Через какое время грузы достигнут окружности? Как это время зависит от угла α наклона хорды к вертикали? Трением пренебречь.

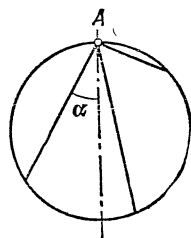


Рис. 1.1.

1.3. Небольшое тело скользит со скоростью $v = 10$ м/с по горизонтальной плоскости, приближаясь к щели. Щель образована двумя отвесными параллельными стенками, находящимися на расстоянии $d = 5$ см друг от друга. Скорость v перпендикулярна стенкам. Глубина щели $H = 1$ м. Сколько раз тело ударится о стенки, прежде чем упадет на дно? Удар о стенку считать абсолютно упругим.

1.4. Небольшой шарик движется без трения один раз по желобу ABC , а другой раз по желобу ADC (рис. 1.2). Части желоба AD и BC вертикальны, а углы ABC и ADC закруглены. Изобразить графически для обоих случаев зависимость скорости v шарика от времени t , если $AB = BC = AD = DC = h$. Скорость шарика в точке A равна нулю. По какому пути (ABC или ADC) шарик скорее попадет из точки A в точку C ?

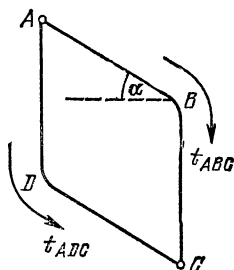


Рис. 1.2.



Рис. 1.3.

1.5. Торпеду выпускают из точки A в момент, когда корабль противника находится в точке B , двигаясь со скоростью $v_1 = 50$ км/ч,

направленной под углом $\beta = 30^\circ$ к линии AB (рис. 1.3). Скорость торпеды $v_2 = 100$ км/ч. Под каким углом α ее надо выпустить, чтобы она поразила цель?

1.6. В точках A и B находятся моторная лодка и катер, движущиеся с заданными постоянными скоростями v_l и v_k в направлениях, показанных на рис. 1.4. Определить графически, каким будет наименьшее расстояние между лодкой и катером.

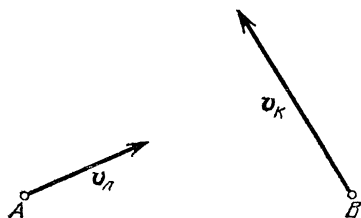


Рис. 1.4.

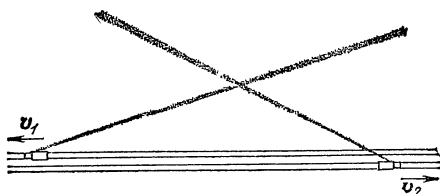


Рис. 1.5.

1.7. Рис. 1.5 сделан с фотографии шлейфов дыма от двух паровозов, движущихся по прямолинейному участку дороги со скоростями $v_1 = 50$ км/ч и $v_2 = 70$ км/ч (вид сверху). Направления движения поездов указаны стрелками. Найти скорость ветра.

1.8. Спортсмен прыгает с 10-метровой вышки и погружается в воду на расстоянии $l = 3$ м по горизонтали от края вышки через время $t = 2$ с. Определить скорость спортсмена в момент прыжка.

1.9. Из трех труб, расположенных на земле, с одинаковой скоростью бьют струи воды под углами 60° , 45° и 30° к горизонту. Найти отношение наибольших высот подъема струй воды, вытекающих из труб, и отношение дальностей падения воды на землю.

1.10. В дождевальных установках для поливки полей используются сферические насадки с большим числом одинаковых отверстий,

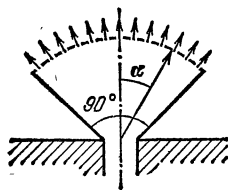


Рис. 1.6.

через которые вода вытекает со скоростью v (рис. 1.6). Как должно зависеть от угла α число отверстий, приходящихся на единицу площади, чтобы поле вокруг насадки поливалось равномерно? Считать, что насадка расположена на уровне земли и ее размер мал по сравнению с размером поливаемого круга. Угол раствора конуса насадки равен 90° .

1.11. На реке на расстоянии $L = 60$ м от берега стоит на якоре плот. Скорость течения реки у самого берега $u_0 = 0$ и растет пропорционально расстоянию от берега, так что у плота скорость $u_L = 2$ м/с. Моторная лодка отправляется от берега к плоту. Относительно воды лодка развивает скорость $v = 7,2$ км/ч. Как должен моторист ориентировать лодку перед отплытием, чтобы без дальнейшей корректировки скорости лодки пристать к плоту

точно напротив места отплытия? Какое время T лодка будет при этом находиться в пути?

1.12. Самолет летит горизонтально на высоте $H=4$ км над поверхностью Земли со сверхзвуковой скоростью. Звук дошел до наблюдателя через время $t=10$ с после того, как над ним пролетел самолет. Определить скорость v самолета. Скорость звука $c=330$ м/с.

1.13. Самолет летит горизонтально со скоростью $v=470$ м/с. Человек услышал звук от самолета через время $t=21$ с после того, как самолет пролетел над ним. На какой высоте летит самолет? Скорость звука $c=330$ м/с.

1.14. Гладкий диск радиуса R , плоскость которого горизонтальна, вращается вокруг своей оси с частотой $n=40$ об/мин. От поверхности диска на расстоянии $R/2$ от оси отрывается небольшое тело, которое без трения скользит по диску. Через какое время оно соскользнет с диска?

1.15. Цилиндр радиуса $R=20$ см вращается вокруг своей оси с частотой $n=20$ об/мин. Вдоль образующей цилиндра движется тело с постоянной скоростью $v=30$ см/с относительно поверхности цилиндра. Определить полную скорость и ускорение этого тела.

1.16. Определить скорость, с которой движется тень Луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения, не учитывая поправки на орбитальное движение Земли. Для простоты считать, что затмение наблюдается на экваторе в полдень и что земная ось перпендикулярна к плоскости лунной орбиты. Направления вращения Земли вокруг своей оси и движения Луны по орбите совпадают (рис. 1.7). Расстояние между Землей и Луной $r=3,8 \cdot 10^5$ км, радиус Земли $R_3=6,4 \cdot 10^3$ км. Лунный месяц принять равным 28 земным суткам. При расчете принять во внимание, что расстояние от Земли до Солнца значительно превышает расстояние от Земли до Луны.

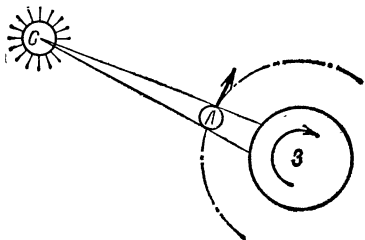


Рис. 1.7.

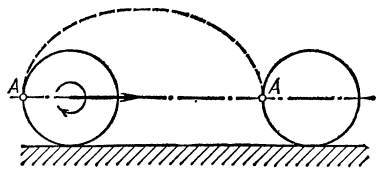


Рис. 1.8.

1.17. Колесо радиуса R равномерно катится по горизонтальной поверхности. От точки A колеса отрывается капелька грязи (рис. 1.8). С какой скоростью v движется колесо, если капелька, побывав в воздухе, снова опустилась на то же самое место колеса? Сопротивление воздуха не учитывать.

Статика

1.18. Шар висит на нити, опираясь о стенку, как показано на рис. 1.9. Центр шара C лежит на одной вертикали с точкой подвеса O ; нить образует с вертикалью угол α , а радиус, проведенный в точку крепления нити A , — угол β . При каком коэффициенте трения шара о стенку такое равновесие возможно? Считать, что $\alpha + \beta = \pi/2$.

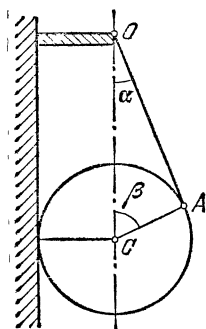


Рис. 1.9.

1.19. Лестница длины $l = 3$ м стоит, упираясь верхним закругленным концом в гладкую стену, а нижним — в пол. Угол наклона лестницы к горизонту $\alpha = 60^\circ$, ее масса $m = 15$ кг. На лестнице на расстоянии $a = 1$ м от ее верхнего конца стоит человек массы $M = 60$ кг. С какой силой давит на пол нижний конец лестницы и как направлена эта сила?

1.20. Штанга массы m и длины l закреплена на нижнем концом на шарнире (рис. 1.10). К верхнему концу штанги привязана нить, перекинутая через блок, укрепленный на высоте H от шарнира на одной с ним вертикали. Какой минимальный груз нужно подвесить на другой конец нити, чтобы штанга устойчиво стояла в вертикальном положении?

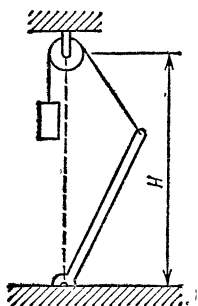


Рис. 1.10.

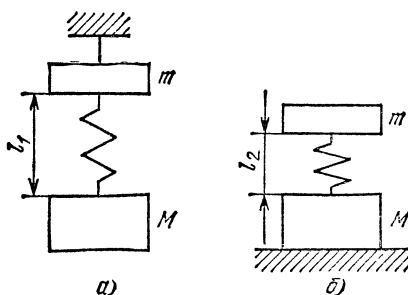


Рис. 1.11.

1.21. Пружина скрепляет два груза с массами m и M . Когда система подвешена за верхний груз (рис. 1.11, а), длина пружины равна l_1 . Если систему поставить на подставку (рис. 1.11, б),

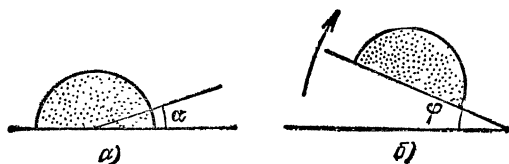


Рис. 1.12.

длина пружины будет равна l_2 . Определить длину ненапряженной пружины l_0 .

1.22. Под каким углом α легче всего тянуть веревку, волоча тяжелый груз по горизон-

тальной плоскости (рис. 1.12, а)? Известно, что груз сам начнет соскальзывать с наклонной плоскости при угле наклона φ (рис. 1.12, б).

1.23. С какой минимальной горизонтальной силой F надо действовать на брусок массы $m = 1$ кг, находящийся на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$, чтобы он поконлся (рис. 1.13)? Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $k = 0,2$.

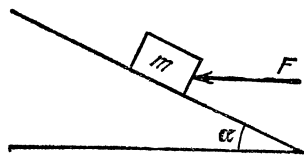


Рис. 1.13.

1.24. С какой минимальной горизонтальной силой F надо действовать на брусок массы $m = 2$ кг, находящийся на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$, чтобы он двигался равномерно вверх по наклонной плоскости (рис. 1.13)? Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $k = 0,3$.

1.25. Прямоугольный брусок с размерами $a \times b$ (рис. 1.14) тянут равномерно по горизонтальной плоскости за веревку, угол наклона которой α можно менять. Коэффициент трения бруска о плоскость равен k . При каком угле α брусок начнет приподниматься?

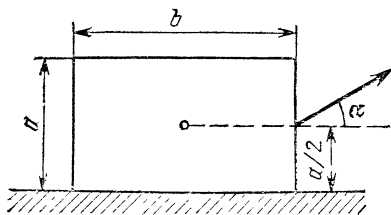


Рис. 1.14.

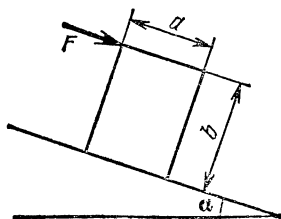


Рис. 1.15.

1.26. Брусок массы m с размерами $a \times b$ (рис. 1.15) стоит на наклонной плоскости с углом наклона α . На брусок начинает действовать сила F , параллельная наклонной плоскости. При какой силе F брусок опрокинется? Известно, что соскальзывать с наклонной плоскости брусок при этом не будет.

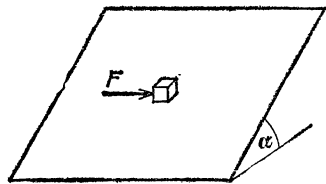


Рис. 1.16.

1.27. Небольшой кубик массы $m = 100$ г покоится на шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30^\circ$ (рис. 1.16). Коэффициент трения кубика о плоскость $k = 0,8$. Определить минимальную горизонтальную силу F , с которой нужно толкать кубик, чтобы он начал двигаться. Сила лежит в плоскости склона.

1.28. Шестигранный карандаш толкнули вдоль горизонтальной плоскости, как показано на рис. 1.17. При каком коэффициенте трения k между карандашом и плоскостью карандаш будет скользить по плоскости не вращаясь?

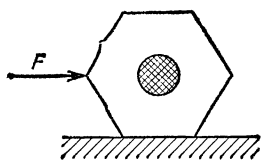


Рис. 1.17.

если известно, что расстояние между осями $L = 2,5$ м, а центр масс расположен на равных расстояниях от осей на высоте $H = 0,75$ м.

1.30. Грузовик массы $M = 8$ т преодолевает крутой подъем (рис. 1.18). К грузовику присоединен прицеп массы $m = 4$ т. Буксирный трос расположен на высоте $h = 1$ м. Центр масс C грузовика находится на высоте $H = 2$ м; расстояние между осями передних и задних колес грузовика $L = 4$ м. При езде по горизонтальной дороге на задние колеса приходится $3/4$ силы тяжести грузовика. При каком угле подъема α грузовик опрокинется назад? Существует ли такая опасность реально, если мощность двигателя достаточна лишь для преодоления подъемов, угол которых не превышает 10° ?

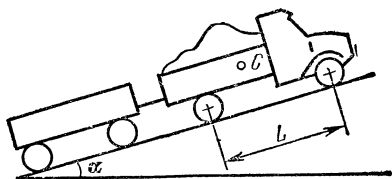


Рис. 1.18.

1.31. Как изменится сила давления передних колес автомобиля массы $m = 1500$ кг, движущегося по горизонтальной дороге (с коэффициентом трения $k = 0,4$), при максимально возможном без возникновения скольжения торможении задних колес? Центр масс автомобиля находится посередине между колесами и приподнят над землей на высоту $h = 60$ см; расстояние между передними и задними колесами $d = 3,5$ м.

1.32. Призма с углом наклона α движется с ускорением a по гладкому горизонтальному столу (рис. 1.19). При каком ускорении a брусок, лежащий на призме, начнет подниматься? Коэффициент трения между бруском и призмой равен k .

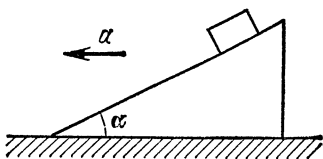


Рис. 1.19.

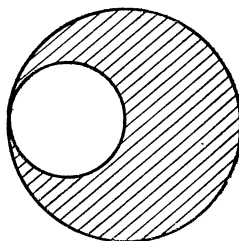


Рис. 1.20.

1.33. Однородная тонкая пластинка имеет форму круга радиуса R , в котором вырезано отверстие вдвое меньшего радиуса, касающееся края пластинки (рис. 1.20). Где находится центр масс пластинки?

1.34. Катушку тянут за нить по полу, как показано на рис. 1.21, причем ускорение катушки постоянно и равно a . При каком коэффициенте трения между ободами катушки и полом катушка будет скользить не вращаясь? Радиусы обода и вала катушки равны R и r .

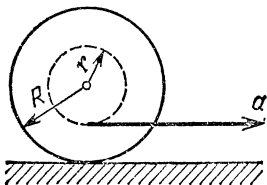


Рис. 1.21.

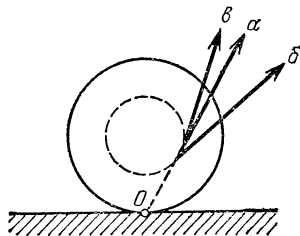


Рис. 1.22.

1.35. В какую сторону будет катиться катушка, если ее тянуть за нить под разными углами (рис. 1.22)? Рассмотреть случаи: а) направление нити проходит через точку O (точку касания катушки и стола); б) угол наклона нити меньше, чем в случае а); в) угол наклона нити больше, чем в случае а). Во всех случаях катушка не проскальзывает.

1.36. В цилиндре на расстоянии $2R/3$ от центра параллельно оси просверлено отверстие радиуса $R/4$ (рис. 1.23). Отверстие залито веществом, плотность которого в 11 раз больше плотности вещества цилиндра. Цилиндр лежит на доске, которую медленно поднимают за один конец. Каков максимальный угол α наклона доски, при котором цилиндр еще может находиться на ней в равновесии? Коэффициент трения цилиндра о доску $k=0,3$.

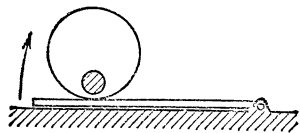


Рис. 1.23.

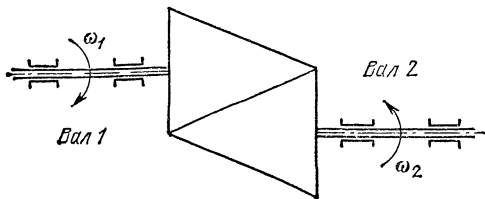


Рис. 1.24.

1.37. Вращение вала 1 передается на вал 2 за счет сил трения с помощью фрикционной передачи, представляющей собой два одинаковых конуса, равномерно прижатых друг к другу по образующей (рис. 1.24). Найти угловую скорость ω_2 ненагруженного вала 2, если угловая скорость вала 1 равна ω_1 .

Динамика

1.38. Три бруска одинаковой массы $M=5$ кг лежат на горизонтальном столе. Бруски связаны нитями, которые рвутся при силе натяжения $T=20$ Н. Коэффициенты трения брусков о стол равны $k_1=0,3$, $k_2=0,2$, $k_3=0,1$. К бруску 3 прикладывают силу F , которую медленно увеличивают. Которая из нитей, скрепляющих бруски, порвется, и при какой минимальной силе F_{\min} это произойдет? Как изменится ответ, если силу F прикладывать к бруску 1?

1.39. К грузу массы $m_1=7$ кг подвешен на веревке груз массы $m_2=5$ кг. Масса веревки $m=4$ кг. К грузу m_1 приложена направленная вверх сила $F=188,8$ Н. Найти силу натяжения в верхнем конце и в середине веревки.

1.40. Два грузика с массами $m_1=300$ г и $m_2=200$ г соединены нитью, перекинутой через блок, подвешенный на пружинных весах. Определить ускорение грузов, показание пружинных весов и натяжение нити. Трением в оси блока и его массой пренебречь.

1.41. На штанге укреплен неподвижный невесомый блок, через который перекинута нить с двумя грузами, массы которых $m_1=500$ г и $m_2=100$ г. В грузе m_2 имеется отверстие, через которое проходит штанга (рис. 1.25). Сила трения груза m_2 о штангу постоянна и равна $F_{\text{тр}}=13$ Н. Найти ускорение a грузов и силу натяжения T нити.

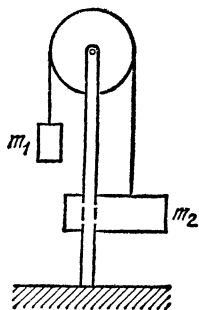


Рис. 1.25.

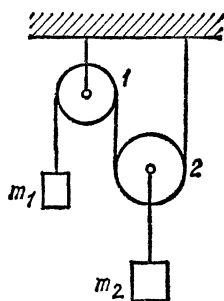


Рис. 1.26.

1.42. Предполагая массы грузов m_1 и m_2 известными, найти их ускорения a_1 и a_2 в системе, состоящей из неподвижного блока 1 и подвижного блока 2 (рис. 1.26). Массами блоков и трением в их осях пренебречь.

1.43. Через неподвижный блок, масса которого пренебрежимо мала, перекинута невесомая веревка. На одном конце веревки висит груз массы $M=25$ кг, а за другой конец ухватилась обезьяна и карабкается вверх. С каким ускорением a поднимается обезьяна, если груз находится все время на одной высоте? Масса обезьяны $m=20$ кг. Через какое время t обезьяна достигнет блока, если первоначально она находилась от него на расстоянии $l=20$ м?

1.44. Два бруска одинаковой массы $m = 0,2$ кг поставили на наклонную плоскость с углом наклона $\alpha = 45^\circ$ (рис. 1.27). Коэффициент трения верхнего бруска о плоскость $k_1 = 0,01$, нижнего $k_2 = 1$. Определить силу взаимодействия брусков при их совместном соскальзывании с наклонной плоскости.

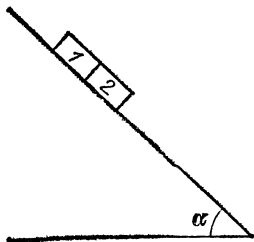


Рис. 1.27.

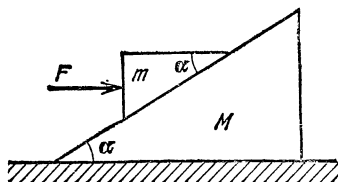


Рис. 1.28.

1.45. На гладком горизонтальном столе лежит призма массы M с углом наклона α , а на ней призма массы m (рис. 1.28). На меньшую призму действует горизонтальная сила F ; при этом обе призмы движутся вдоль стола как одно целое (т. е. не изменяя взаимного расположения). Определить силу трения между призмами.

1.46. За какое время t тело массы m соскользнет с наклонной плоскости высоты h с углом наклона β , если по наклонной плоскости с углом наклона α оно движется вниз равномерно?

1.47. Чему должен быть равен минимальный коэффициент трения k между шинами и поверхностью наклонной дороги с уклоном $\alpha = 30^\circ$, чтобы автомобиль мог двигаться по ней вверх с ускорением $a = 0,6$ м/с²?

1.48. На гладком горизонтальном столе лежит брусок массы $M = 2$ кг, на котором находится брусок массы $m = 1$ кг. Оба бруска соединены легкой нитью, перекинутой через невесомый блок (рис. 1.29). Какую силу F нужно приложить к нижнему бруску, чтобы он начал двигаться от блока с постоянным ускорением $a = g/2$? Коэффициент трения между брусками $k = 0,5$. Трением между нижним бруском и столом пренебречь.

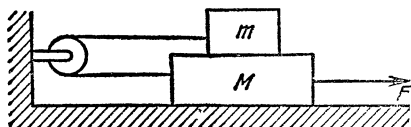


Рис. 1.29.

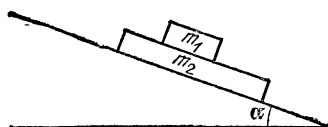


Рис. 1.30.

1.49. На наклонную плоскость с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ помещена плоская плита массы $m_2 = 10$ кг, а на нее — брусок массы $m_1 = 5$ кг (рис. 1.30). Коэффициент трения между бруском и плитой $k_1 = 0,15$, а между плитой и плоскостью $k_2 = 0,3$. Определить

ускорения обоих тел. При каком коэффициенте трения k_2 плита не будет двигаться?

1.50. Через блок, укрепленный в вершине наклонной плоскости, перекинута веревка с двумя грузами одинаковой массы m (рис. 1.31). Найти силу давления на ось, если коэффициент трения между наклонной плоскостью и лежащим на ней грузом равен k , а угол наклона плоскости равен α . Трением в оси блока и его массой пренебречь.

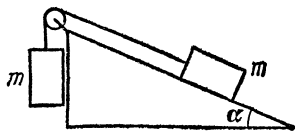


Рис. 1.31.

1.51. Человек скатывается на санях под уклон, составляющий угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Масса человека M в два раза больше массы саней m . Коэффициент трения саней о поверхность склона $k = 0,3$. Как должен двигаться человек относительно саней, чтобы сани двигались под уклон равномерно?

1.52. Человек скатывается на санях под уклон, составляющий угол $\alpha = 6^\circ$ с горизонтом. Масса саней M в два раза больше массы человека m . Коэффициент трения саней о поверхность склона $k = 0,2$. Как должен двигаться человек относительно саней, чтобы сани двигались под уклон равномерно?

1.53. Горизонтальная доска имеет ступеньку высоты H , в которую упирается свободно лежащий на доске однородный цилиндр радиуса $R > H$ (рис. 1.32). Доску двигают в горизонтальном направлении с ускорением a . Определить максимально возможное ускорение, при котором цилиндр еще не будет подниматься на ступеньку. Трением пренебречь.

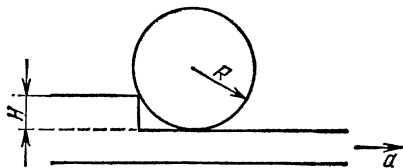


Рис. 1.32.

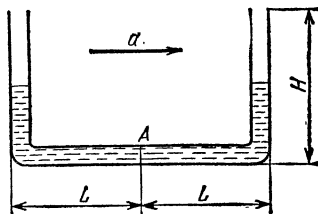


Рис. 1.33.

1.54. Тонкая U-образная трубка, размеры которой указаны на рис. 1.33, заполнена ртутью до половины вертикальных частей трубки. Трубка движется горизонтально с ускорением a . Найти разность высот h ртути в вертикальных частях трубки и давление в сечении A. При каком ускорении ртуть начнет выливаться из трубки? Атмосферное давление равно P_0 , плотность ртути равна ρ .

1.55. Поезд, подъезжая к станции со скоростью $v = 72$ км/ч, начинает равномерно тормозить. Каково наименьшее время торможения поезда до полной остановки, безопасное для спящих пассажиров (пассажиры не падают с полок)? Коэффициент трения о полки $k = 0,2$.

1.56. Длина взлетной полосы самолета $L = 1$ км, скорость при взлете $v = 200$ км/ч. Какую перегрузку испытывает пассажир в этом самолете, если разгон происходит равномерно?

1.57. Автомобиль массы $m = 2 \cdot 10^3$ кг движется со скоростью $v = 90$ км/ч. В момент времени $t = 0$ на него начинает действовать тормозящая горизонтальная сила F , которая нарастает со временем по линейному закону (рис. 1.34). Через какое время автомобиль остановится?

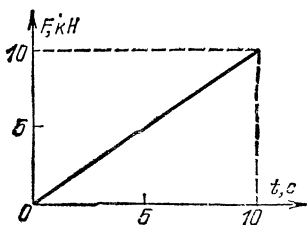


Рис. 1.34.

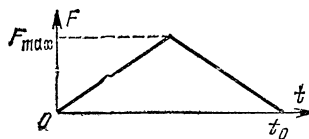


Рис. 1.35.

1.58. Какую скорость может сообщить футболист мячу при ударе, если максимальная сила, с которой он может действовать на мяч, $F_{\max} = 3,5 \cdot 10^3$ Н, время удара $t_0 = 8 \cdot 10^{-3}$ с? Считать, что сила во время удара нарастает и спадает по линейному закону (рис. 1.35). Масса мяча $m = 0,5$ кг.

1.59. При скоростном спуске лыжник шел вниз по склону с углом наклона $\varphi = 45^\circ$, не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег $k = 0,1$. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости: $F = \alpha v^2$, где постоянная величина $\alpha = 0,7$ кг/м. Какую максимальную скорость мог развить лыжник, если его масса $m = 90$ кг?

1.60. Парашютист массы $m_1 = 80$ кг падает при открытом парашюте с установившейся скоростью $v_1 = 5$ м/с. Какой будет установившаяся скорость, если на том же парашюте спускается мальчик массы $m_2 = 40$ кг? Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости.

1.61. Два одинаковых шарика связаны невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок, причем один из шариков погружен в сосуд с жидкостью (рис. 1.36). С какой установившейся скоростью v будут двигаться шарики, если известно, что установившаяся скорость падения одиночного шарика в той же жидкости равна v_0 ? Сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости. Плотность жидкости равна $\rho_{\text{ж}}$, плотность материала шариков равна ρ .

1.62. От поезда, идущего по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью v_0 , отцепляется 1/3 состава. Через некоторое время скорость отцепившихся вагонов уменьшилась в два раза.

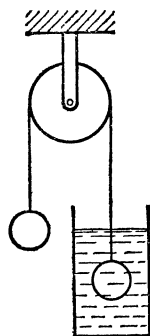


Рис. 1.36.

Считая, что сила тяги при разрыве состава не изменилась, определить скорость головной части поезда в этот момент. Сила трения пропорциональна силе тяжести и не зависит от скорости.

1.63. Груз массы $M = 10$ кг привязан к свободно свисающему концу веревки, намотанной на лебедку. И груз, и лебедка находятся на некоторой высоте. Груз начинает падать, причем веревка натянулась, когда груз пролетел расстояние $h = 12$ м. После этого при помощи лебедки начали тормозить движение груза. Какую минимальную длину l веревки пришлось выпустить до полной остановки груза, если веревка выдерживает силу натяжения $T = 180$ Н?

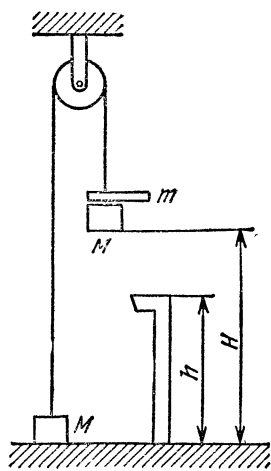


Рис. 1.37.

1.64. Прибор, предназначенный для изучения законов равноускоренного движения, состоит из двух грузов одинаковой массы $M = 100$ г, связанных легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок (рис. 1.37). В начальный момент левый груз касается пола, а правый находится на высоте $H = 5$ м над полом. На правый груз кладут перегрузок массы $m = 10$ г, и система начинает двигаться. Когда правый груз окажется на высоте $h = 4$ м над полом, перегрузок m зацепляется за неподвижную стойку и остается на ней. Через какое время от начала движения правый груз коснется пола?

1.65. Футболист бьет по мячу со средней силой $F = 5 \cdot 10^2$ Н. Мяч после удара улетает под углом 45° к горизонту и приземляется на расстоянии $L = 40$ м. Определить время удара по мячу. Сопротивлением воздуха пренебречь. Масса мяча $m = 0,5$ кг.

1.66. На две частицы — одну массы m , летящую со скоростью v , другую массы $2m$, летящую со скоростью $v/2$ перпендикулярно к первой (рис. 1.38), — в течение некоторого времени действуют одинаковые по модулю и направлению силы. К моменту прекращения действия сил первая частица начинает двигаться со скоростью v в направлении, перпендикулярном к первоначальному. С какой скоростью будет двигаться при этом вторая частица?

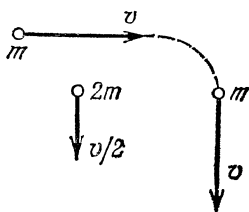


Рис. 1.38.

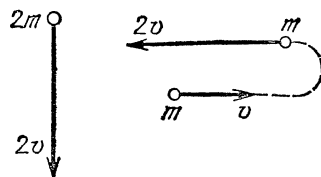


Рис. 1.39.

1.67. На две частицы — одну массы m , летящую со скоростью v , другую массы $2m$, летящую со скоростью $2v$ перпендикулярно к первой (рис. 1.39), — в течение некоторого времени действуют одинаковые по модулю и направлению силы. К моменту прекращения действия сил первая частица начинает двигаться в обратном направлении со скоростью $2v$. С какой скоростью будет двигаться при этом вторая частица?

1.68. Водометный катер движется с постоянной скоростью, забирая забортную воду и выбрасывая назад струю со скоростью $u = 20$ м/с относительно катера. Площадь поперечного сечения струи $S = 0,01$ м². Найти скорость катера, если действующая на него сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости: $F = kv^2$, причем $k = 7,5$ Н·с²/м².

1.69. Водометный катер забирает забортную воду и выбрасывает ее назад со скоростью u относительно катера. При этом он движется со скоростью v_0 . К катеру на длинном тросе прицепили буксируемое судно, сила сопротивления которого при одинаковой скорости движения равна силе сопротивления катера. Определить скорость буксира, если известно, что силы сопротивления для катера и буксируемого судна изменяются пропорционально их скоростям.

1.70. Двигатель реактивного самолета, летящего со скоростью $v = 720$ км/ч, в единицу времени засасывает массу $M_t = 100$ кг/с воздуха, расходует массу $m_t = 4$ кг/с топлива и выбрасывает массу $M_t + m_t = 104$ кг/с продуктов сгорания со скоростью $u = 500$ м/с относительно самолета. Определить силу тяги двигателя.

1.71. Космический корабль двигался в потоке метеоритных частиц со скоростью v навстречу потоку. Затем корабль повернул и стал двигаться со скоростью v в ту же сторону, что и поток частиц. При этом силу тяги двигателя уменьшили в четыре раза. Чему равна скорость метеоритных частиц? Корабль считать цилиндром с плоскими торцами, а удар частиц об обшивку — абсолютно упругим.

1.72. На высоте $h = 2$ м над широким сосудом открывают на время $t_0 = 2$ с кран, из которого вниз выливается в единицу времени масса воды $m_t = 0,2$ кг/с. Площадь отверстия крана $S = 1$ см². Найти изменение силы давления сосуда на подставку и изобразить графически эту силу как функцию времени.

1.73. Огнетушитель выбрасывает в единицу времени массу $m_t = 0,2$ кг/с пены со скоростью $v = 20$ м/с. Масса полного огнетушителя $M = 2$ кг. Какую силу должен развить человек, чтобы удерживать огнетушитель неподвижно в вертикальном положении в начальный момент его работы?

1.74. Цилиндр диаметра D заполнен водой и расположен горизонтально (рис. 1.40). С какой скоростью перемещается поршень, если на него действует сила F , а из отверстия в задней стенке цилиндра вытекает струя диаметра d ? Трением пренебречь, силу тяжести не учитывать.

1.75. Груз висит на упругой нити. Если к грузу прикладывать силу, кото-

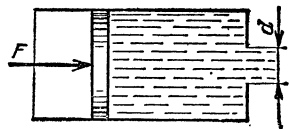


Рис. 1.40.

рая медленно нарастает от нулевого значения, то нить оборвется, когда сила достигнет значения F_1 . При какой минимальной силе оборвется нить, если приложенная сила мгновенно достигает некоторого значения и в дальнейшем остается постоянной?

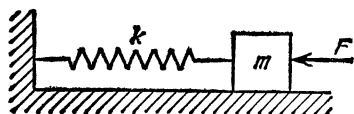


Рис. 1.41.

1.76. На неподвижный груз массы $m = 1$ кг, лежащий на горизонтальном столе и прикрепленный к стенке пружиной жесткости $k = 9 \cdot 10^2$ Н/м, начинает действовать

постоянная горизонтальная сила F (рис. 1.41). Через время t действие силы прекращается. При каком времени t_1 скорость груза будет максимальной в момент прекращения действия силы? При каком времени t_2 груз останется неподвижным?

1.77. Коробка массы M стоит на горизонтальном столе. В коробке на пружине жесткости k подвешен груз массы m (рис. 1.42). При какой амплитуде колебаний груза m коробка начнет подпрыгивать на столе?

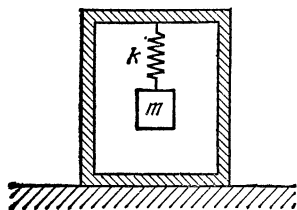


Рис. 1.42.

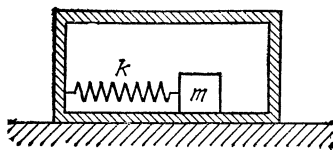


Рис. 1.43

1.78. Коробка массы M стоит на горизонтальном столе. Коэффициент трения между столом и коробкой равен μ . Внутри коробки лежит груз массы m , который может без трения двигаться по дну коробки. Он прикреплен к стенке коробки пружиной жесткости k (рис. 1.43). При какой амплитуде колебаний груза коробка начнет двигаться по столу?

1.79. Две пружины с жесткостями k_1 и k_2 присоединены одним концом к вертикальной стенке, другим к грузу массы m , лежащему на горизонтальном столе (рис. 1.44). В начальный момент пружина k_1 растянута на длину l_1 , а пружина k_2 сжата на длину l_2 , после чего груз m отпустили. Найти амплитуду и период колебаний груза. Трением пренебречь.

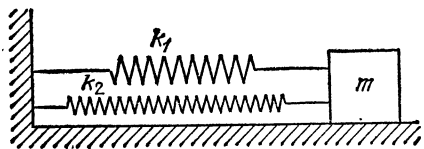


Рис. 1.44.

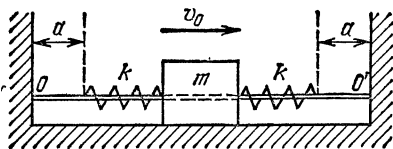


Рис. 1.45.

1.80. Тело массы m может перемещаться вдоль горизонтальной оси OO' между двумя вертикальными стенками (рис. 1.45). По бокам к телу прикреплены невесомые пружины одинаковой жесткости k . Если тело расположено симметрично между стенками, расстояния от концов пружин до стенок равны a . Если телу сообщить скорость v_0 , оно начнет совершать колебания между стенками. Каков период этих колебаний? Трением пренебречь.

1.81. Шарик массы m совершает гармонические колебания с амплитудой A на пружине жесткости k . На расстоянии $A/2$ от положения равновесия установили массивную стальную плиту, от которой шарик абсолютно упруго отскакивает (рис. 1.46). Найти период колебаний в этом случае.

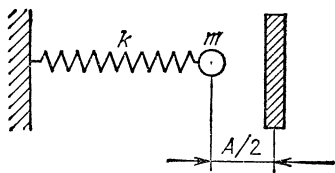


Рис. 1.46.

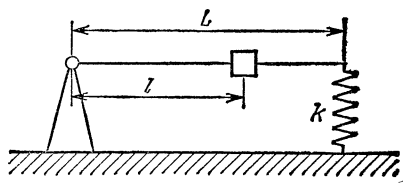


Рис. 1.47.

1.82. Невесомая штанга длины L одним концом закреплена в идеальном шарнире, а другим опирается на пружину жесткости k (рис. 1.47). Определить период малых колебаний штанги в зависимости от положения l на ней груза массы m .

Работа. Мощность. Энергия

1.83. Изучая дорожное происшествие, автоинспектор установил, что след торможения автомобиля, ехавшего по асфальтовой дороге, $L = 60$ м. С какой скоростью ехал автомобиль, если коэффициент трения колес об асфальт при торможении $k = 0,5$?

1.84. Какой путь пройдут сани по горизонтальной поверхности после спуска с горы высоты $H = 15$ м, имеющей угол наклона $\alpha = 30^\circ$? Коэффициент трения саней о поверхность $k = 0,2$.

1.85. Тело без начальной скорости соскальзывает в яму, стенки которой гладкие и плавно переходят в горизонтальное дно (рис. 1.48). Длина дна ямы $l = 2$ м. Коэффициент трения тела о дно $k = 0,3$. Глубина ямы $H = 5$ м. На каком расстоянии от середины ямы тело остановится?

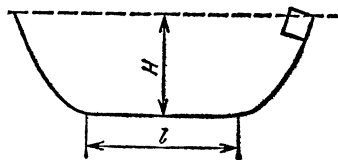


Рис. 1.48.

1.86. Какую работу надо совершить, чтобы втащить сани с грузом (общей массы $m = 30$ кг) на гору высоты $H = 10$ м? Угол наклона горы $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения между санями и горой линейно убывает вдоль пути от $k_1 = 0,5$ у подножия до $k_2 = 0,1$ у вершины.

1.87. Работая с постоянной мощностью, локомотив может вести поезд вверх по наклону при угле наклона $\alpha_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ рад со скоростью $v_1 = 50$ км/ч. Для угла наклона $\alpha_2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ рад при тех же условиях он развивает скорость $v_2 = 60$ км/ч. Определить коэффициент трения, считая его одинаковым в обоих случаях.

1.88. Скатываясь под уклон с углом наклона $\alpha = 6^\circ$, автомобиль массы $m = 1000$ кг разгоняется при выключенной передаче до максимальной скорости $v = 72$ км/ч, после чего движение становится равномерным. Какую мощность развивает двигатель автомобиля при подъеме с такой скоростью по той же дороге вверх?

1.89. Легковой автомобиль массы $M = 1000$ кг равномерно движется по наклонному участку шоссе, поднимаясь на высоту $h = 10$ м на каждый километр пути. Насколько в этом случае расход бензина больше, чем при движении с той же скоростью по горизонтальному участку шоссе? Удельная теплота сгорания бензина $q = 4,6 \cdot 10^7$ Дж/кг. К. п. д. двигателя $\eta = 10\%$. Расход бензина принято относить к пути $l = 100$ км.

1.90. Чему была равна средняя сила сопротивления воды движению парохода, если он в течение трех суток при средней скорости $v = 10$ км/ч израсходовал $M = 6,5$ т угля? К. п. д. судового двигателя $\eta = 0,1$. Удельная теплота сгорания угля $q = 33,5 \cdot 10^6$ Дж/кг.

1.91. В большом городе автомобиль вынужден часто останавливаться у светофоров. Например, такси в Москве на каждые 100 км пробега совершает до 100 остановок. Допустим, что после каждой остановки такси развивает скорость $v = 60$ км/ч. Сила сопротивления движению автомобиля $F = 300$ Н и при этом мало зависит от скорости. Во сколько раз расход бензина в Москве больше по сравнению с загородным маршрутом, где остановки практически отсутствуют? Масса такси $M = 1,5$ т. К. п. д. двигателя не зависит от скорости.

1.92. Железнодорожный состав идет со скоростью $v = 72$ км/ч по горизонтальному участку пути. Насколько должна измениться мощность, развиваемая локомотивом, чтобы состав с той же скоростью двигался во время сильного дождя? Считать, что в единицу времени на состав падает масса $m_t = 100$ кг/с воды, которая затем стекает по стенкам вагонов. Изменением силы трения во время дождя пренебречь.

1.93. От удара копра массы $m = 500$ кг, свободно падающего с некоторой высоты, свая погружается в грунт на глубину $l = 1$ см. Определить силу сопротивления грунта F , считая ее постоянной, если скорость копра перед ударом $v = 10$ м/с. Массой сваи пренебречь.

1.94. Санки, движущиеся по горизонтальному льду со скоростью $v = 6$ м/с, выезжают на асфальт. Длина полозьев санок $L = 2$ м, коэффициент трения санок об асфальт $k = 1$. Какой путь пройдут санки до полной остановки?

1.95. Какая сила необходима для вытаскивания из доски гвоздя длины $l = 80$ мм, если он забит шестью ударами молотка массы

$m = 0,5$ кг при скорости молотка непосредственно перед ударом $v = 2$ м/с? Массой гвоздя пренебречь.

1.96. Какую работу нужно совершить, чтобы длинную доску, лежащую на земле, повернуть в горизонтальной плоскости вокруг одного из концов на угол α ? Длина доски равна L , масса равна M , коэффициент трения между доской и землей равен k .

1.97. Из колодца глубины $H = 20$ м достают воду ведром. Внизу ведро заполняется водой до краев. Из-за течи при подъеме ведра часть воды выливается обратно в колодец. Считая, что подъем производится равномерно, а скорость вытекания воды постоянна, определить работу по подъему ведра, если к концу подъема в ведре остается $\alpha = 2/3$ первоначальной массы воды. Масса пустого ведра $m = 2$ кг, его объем $V = 15$ л.

1.98. В водоеме укреплена вертикальная труба с поршнем так, что нижний конец ее погружен в воду. Поршень, лежавший вначале на поверхности воды, медленно поднимают на высоту $H = 15$ м (рис. 1.49). Какую работу пришлось при этом совершить? Площадь поршня $S = 1$ дм². Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па. Массой поршня пренебречь.

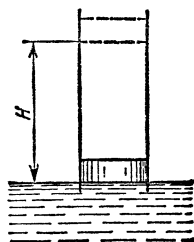


Рис. 1.49.

1.99. Математический маятник длины l и массы m раскачивают так, что каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия, на него в течение короткого промежутка времени t действует сила F , направленная параллельно скорости. Через сколько колебаний маятник отклонится на 90° ?

1.100. У двух одинаковых ракет, одна из которых движется, а другая покоится, на короткое время включаются двигатели. За время работы они выбрасывают одинаковые массы газа (малые по сравнению с массой ракет) с одинаковыми относительно ракет скоростями. Кинетическая энергия двигавшейся ракеты, равная вначале K , возросла на 4 %. Определить кинетическую энергию второй ракеты.

1.101. Сила $F = 20$ Н, действовавшая в течение короткого промежутка времени $t = 10^{-2}$ с на покоящееся тело, сообщила ему кинетическую энергию $K_0 = 3$ Дж. Какую энергию сообщит эта сила тому же телу за то же время t , если начальная скорость тела $v_0 = 10$ м/с, а сила действует в направлении скорости?

1.102. Веревка длины $l = 20$ м переброшена через блок. В начальный момент веревка висит симметрично и покоится, а затем в результате незначительного толчка начинает двигаться по блоку. Будет ли движение веревки равноускоренным? Какова будет скорость веревки, когда она сойдет с блока? Массой блока пренебречь, радиус блока считать малым.

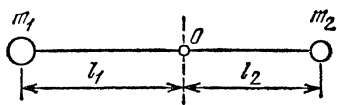


Рис. 1.50.

1.103. Вокруг горизонтальной оси O может свободно вращаться легкий рычаг, плечи которого равны l_1 и l_2

(рис. 1.50). На концах рычага укреплены грузы с массами m_1 и m_2 . Какую скорость будет иметь в нижней точке один из грузов, если первоначально рычаг находился в горизонтальном положении?

1.104. Какова должна быть минимальная мощность насоса, поднимающего воду по трубе на высоту h ? Сечение трубы равно S ; насос за единицу времени перекачивает объем воды V_t (рис. 1.51).

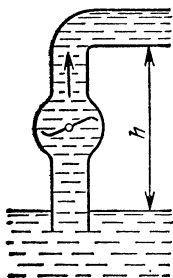


Рис. 1.51.

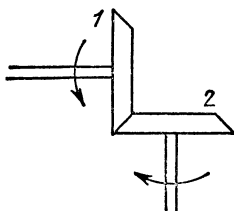


Рис. 1.52.

1.105. Вентилятор гонит струю воздуха через отверстие в стене. Во сколько раз надо увеличить мощность N_1 вентилятора, чтобы перегоняемая вентилятором в единицу времени масса воздуха m_t увеличилась в два раза?

1.106. На рис. 1.52 изображена шестеренчатая передача. На вал двигателя насажена шестерня 1, сцепленная с шестерней 2, сидящей на рабочем валу. Известно, что полезная мощность двигателя $N = 63$ кВт, а рабочий вал вращается с частотой $n = 3000$ об/мин. Определить моменты M_1 и M_2 сил, действующие на вал двигателя и рабочий вал, если отношение чисел зубьев шестерен 1 и 2 $m = 5$.

1.107. Имеются два тонкостенных цилиндра. Один из них, радиус которого равен R , вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси, а второй покоится. Цилиндры приводятся в соприкосновение так, что их оси вращения параллельны (рис. 1.53). Через некоторое время (за счет трения) цилиндры начинают вращаться без проскальзывания. Какое количество энергии перешло в тепло? Массы цилиндров равны m_1 и m_2 .

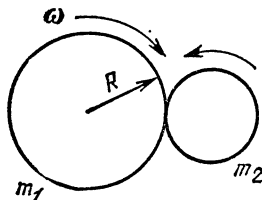


Рис. 1.53.

1.108. С наклонной плоскости одновременно начинают соскальзывать брусок и скатываться без проскальзывания обруч. При каком коэффициенте трения k между бруском и плоскостью оба тела будут двигаться не обгоняя друг друга? Угол наклона плоскости равен α .

Законы сохранения энергии и импульса

1.109. Цирковой гимнаст падает с высоты $H = 1,5$ м на тугую натянутую упругую предохранительную сетку. Каково будет максимальное провисание гимнаста в сетке, если в случае спокойно лежащего в сетке гимнаста провисание $l_0 = 0,1$ м?

1.110. Легкая пружина жесткости k и длины l стоит вертикально на столе. С высоты H над столом на нее падает небольшой шарик

массы m (рис. 1.54). Какую максимальную скорость будет иметь шарик при своем движении вниз? Трением пренебречь.

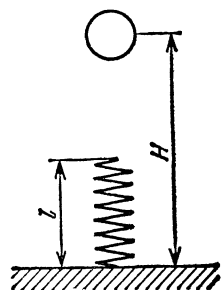


Рис. 1.54.

1.112. Самолет садится на палубу авианосца, имея скорость $v = 108$ км/ч. Зацепившись за упругий канат торможения, он пробегает путь $l = 30$ м до полной остановки. Определить максимальный вес пилота при посадке, считая, что торможение вызвано только упругими силами каната (т. е. не учитывая сил трения). Масса пилота $m = 70$ кг.

1.113. Груз массы $m = 10^3$ кг опускается с помощью лебедки с постоянной скоростью $v = 4$ м/с (рис. 1.55). Какова будет максимальная сила натяжения троса при внезапной остановке лебедки, если жесткость троса $k = 5 \cdot 10^5$ Н/м? Массой троса и трением пренебречь.

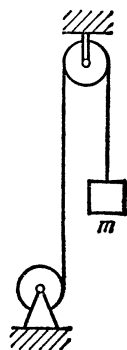


Рис. 1.55.

1.114. Две ракеты одинаковой массы M летят в одном направлении — одна со скоростью v , другая со скоростью $1,1v$. Когда ракеты поравнялись, первая ракета на короткое время включила двигатель. Какую массу топлива должна она выбросить со скоростью $3v$ относительно ракеты, чтобы скорости ракет уравнились?

1.115. На гладком столе покоятся точечные массы $3m$ и $2m$, скрепленные невесомой жесткой штангой. На массу $3m$ налетает и прилипает к ней кусочек пластилина массы m , двигавшийся вдоль стола со скоростью v_0 перпендикулярно штанге (рис. 1.56). С какой скоростью должен двигаться наблюдатель, для которого движение штанги после соударения является чистым вращением? В каком отношении точка, вокруг которой происходит это вращение, делит штангу?

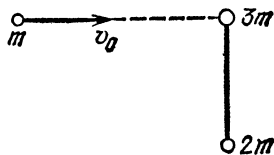


Рис. 1.56.

1.116. Тележка стоит на гладких рельсах. Человек переходит с одного ее конца на другой. На какое расстояние переместится при этом тележка? Масса человека $m_1 = 60$ кг. Масса тележки $m_2 = 120$ кг, ее длина $L = 3$ м.

1.117. Доска массы m_1 свободно скользит по поверхности льда со скоростью v_1 . На доску с берега прыгает человек массы m_2 .

Скорость человека перпендикулярна к скорости доски и равна u_2 . Определить скорость v доски с человеком. Силой трения доски о лед пренебречь.

1.118. Открытая цистерна с водой стоит на рельсах, по которым может двигаться без трения. Масса цистерны равна M , масса воды равна m . Сверху в цистерну на расстоянии l от ее центра падает вертикально груз массы m_0 . В какую сторону и на какое расстояние сдвинется цистерна к тому времени, когда движение воды успокоится и груз будет плавать? Объяснить механизм явления.

1.119. Снаряд, вылетевший из орудия, разбивается на два одинаковых осколка в наивысшей точке своей траектории на расстоянии a от орудия (по горизонтали). Один из осколков полетел в обратном направлении с той же скоростью, с которой летел снаряд до разрыва. На каком расстоянии от орудия упадет второй осколок? Спротивлением воздуха пренебречь.

1.120. Пуля массы m попадает в деревянный брусок массы M , подвешенный на нити длины l (баллистический маятник), и застревает в нем. На какой угол α отклонится маятник, если скорость пули равна v ?

1.121. Из духового ружья стреляют в спичечную коробку, лежащую на расстоянии $l = 30$ см от края стола. Пуля массы $m = 1$ г, летящая горизонтально со скоростью $v_0 = 150$ м/с, пробивает коробку и вылетает из нее со скоростью $v_0/2$. Масса коробки $M = 50$ г. При каком коэффициенте трения k между коробкой и столом коробка упадет со стола?

1.122. Две частицы с массами m и $2m$, имеющие импульсы p и $p/2$, движутся по взаимно перпендикулярным направлениям. После соударения частицы обмениваются импульсами. Определить потерю механической энергии при соударении.

1.123. Тело массы m_1 , движущееся со скоростью v , налетает на покоящееся тело и после упругого соударения отскакивает от него под углом 90° к первоначальному направлению своего движения со скоростью $v/2$. Определить массу второго тела.

1.124. Частица массы m , движущаяся со скоростью v , налетает на покоящуюся частицу массы $m/2$ и после упругого соударения

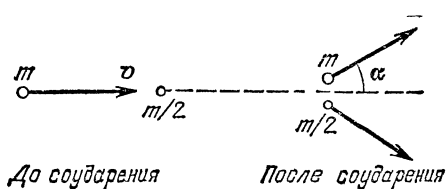


Рис. 1.57.

отскакивает от нее под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению своего первоначального движения (рис. 1.57). С какой скоростью начнет двигаться вторая частица?

1.125. Два упругих шарика подвешены на тонких нитях рядом так, что они находятся на одной высоте и соприкасаются.

Длины нитей равны $l_1 = 10$ см и $l_2 = 6$ см. Массы шариков $m_1 = 8$ г и $m_2 = 20$ г. Шарик массы m_1 отклоняют на угол $\alpha = 60^\circ$ и отпускают. Определить максимальное отклонение шариков от вертикали после соударения. Соударение считать абсолютно упругим.

1.126. Три шара с одинаковыми радиусами, но различными массами подвешены рядом на нитях одинаковой длины и соприкасаются. Шар массы m_1 отклоняют так, что он поднимается на высоту H , и отпускают (рис. 1.58). При каких массах m_2 и m_3 все три шара после соударения первого шара со вторым и второго с третьим будут иметь одинаковые импульсы? На какую высоту они поднимутся? Все соударения считать абсолютно упругими.

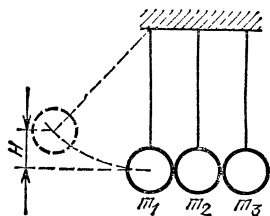


Рис. 1.58.

1.127. Два шара — стальной массы m и свинцовый массы $m/4$ — подвешены на нитях в одной точке. Свинцовый шар отклоняют так, что он поднимается на высоту H , и отпускают. После соударения он поднимается на высоту h . Удар — центральный. Определить количество энергии, перешедшее в тепло.

1.128. Между двумя шариками с массами m_1 и m_2 находится сжатая пружина. Если один из шариков (массы m_2) удерживать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью v_0 . С какой скоростью будет двигаться шарик массы m_1 , если оба шарика освобождаются одновременно? Деформации пружины в обоих случаях одинаковы.

1.129. Тело массы M под действием пружины совершает колебания с амплитудой A_0 на гладком горизонтальном столе. В момент, когда тело проходит положение равновесия, на него сверху падает и прилипает к нему кусок пластилина массы m . Как изменится амплитуда колебаний?

1.130. Два шарика одинаковой массы m соединены невесомой пружиной жесткости k и длины l и лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе. Третий шарик массы m движется со скоростью v_0 по линии, соединяющей центры первых двух (рис. 1.59), и упруго соударяется с одним из них. Определить максимальное и минимальное расстояния между шариками, связанными пружиной, при их дальнейшем движении. В моменты максимального сжатия и растяжения пружины шарики имеют одинаковые скорости.

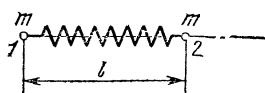


Рис. 1.59.

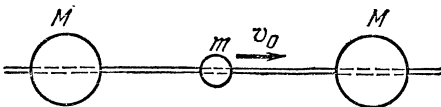


Рис. 1.60.

1.131. Бусинке массы $m = 1$ г сообщают скорость $v_0 = 10$ м/с, направленную вдоль горизонтальной спицы (рис. 1.60). По обе стороны от бусинки на ту же спицу надеты две гири одинаковой массы $M = 1$ кг. Бусинка поочередно упруго отражается от них и приводит их в движение. Найти скорости гирь после того, как соударения прекратятся, если трение при движении всех трех тел пренебрежимо мало.

1.132. Тело массы $m = 1$ кг скользит без трения по гладкому горизонтальному столу и въезжает на подвижную горку массы $M = 5$ кг (рис. 1.61). Высота горки $H = 1,2$ м. Трение между горкой

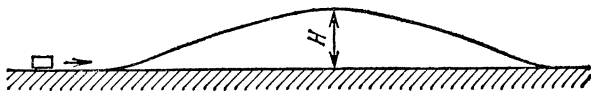


Рис. 1.61.

и столом отсутствует. Найти конечные скорости тела и горки. Начальная скорость тела $v_0 = 5$ м/с.

1.133. На пути тела, скользящего по гладкому горизонтальному столу, находится незакрепленная горка высоты $H = 2$ м (см. рис. 1.61). При какой минимальной скорости тело сможет преодолеть горку? Масса горки в пять раз больше массы тела. Считать, что тело движется не отрываясь от горки. Тело по горке, а также

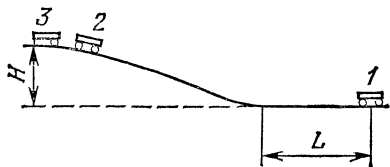


Рис. 1.62.

горка по столу скользят без трения.

1.134. Профиль железнодорожной горки, используемой на сортировочной станции, показан на рис. 1.62. На горизонтальном участке на расстоянии L от конца уклона стоит вагон 1. С горки скатывается без началь-

ной скорости вагон 2, а через время t вагон 3. На каком расстоянии от конца уклона все три вагона окажутся сцепленными? Вагоны одинаковы и снабжены автосцепкой. Трением пренебречь. Высота горки равна H .

1.135. Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты H по гладкой доске, наклоненной под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальный пол. Коэффициент трения мешка о пол $k = 0,7$. Где остановится мешок?

1.136. Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты $H = 2$ м по доске, наклоненной под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальный пол. Коэффициенты трения мешка о доску и пол одинаковы и равны $k = 0,5$. На каком расстоянии от конца доски остановится мешок?

1.137. Стальной шарик скользит без трения по гладкому полу и налетает на шероховатую стальную стену так, что его скорость составляет угол φ с нормалью. Каким должен быть угол φ , чтобы шарик отскочил перпендикулярно к плоскости стены? Коэффициент трения между шариком и стеной равен k .

1.138. Космический аппарат, имеющий форму конуса с высотой $H = 10$ см и углом при вершине $\alpha = 120^\circ$, движется со скоростью $v = 10$ км/с острием вперед в верхних слоях атмосферы. Определить энергию, передаваемую аппаратом молекулам воздуха в едини-

пу времени. Концентрация молекул $n = 10^5 \text{ см}^{-3}$, масса молекулы $m = 4,5 \cdot 10^{-23} \text{ г}$. Считать молекулы покоящимися, а соударения их с аппаратом абсолютно упругими.

1.139. В цилиндре, наполненном газом, поршень перемещается со скоростью u . Определить часть энергии, теряемую молекулой, скорость которой перпендикулярна к поверхности поршня, при соударении с поршнем. Скорость молекулы $v \gg u$. Соударение молекулы с поршнем считать абсолютно упругим.

1.140. Гладкий стальной шарик прыгает по длинной гладкой лестнице, отскакивая по одному разу от каждой ступеньки (рис. 1.63). При каждом соударении со ступенькой шарик теряет $\alpha = 50\%$ энергии. С какой скоростью v и под каким углом φ к вертикали был брошен шарик? Ступенька лестницы имеет высоту $h = 10 \text{ см}$ и длину $l = 20 \text{ см}$.

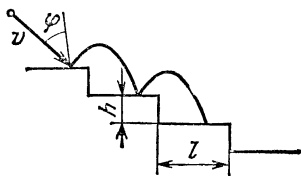


Рис. 1.63.

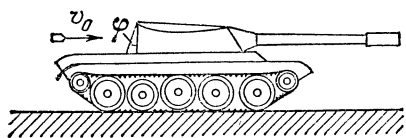


Рис. 1.64.

1.141. В заднюю стенку башни танка, идущего со скоростью $u = 72 \text{ км/ч}$, ударяется горизонтально летящая со скоростью $v_0 = 750 \text{ м/с}$ пуля и упруго отскакивает от нее. С какой скоростью полетит отскакившая пуля? Стенка наклонена к вертикали под углом $\varphi = 30^\circ$ (рис. 1.64).

Вращательное движение

1.142. Обруч радиуса r скатился без проскальзывания с горки высоты h (рис. 1.65). Найти скорости и ускорения точек A и B обода.

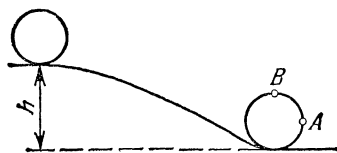


Рис. 1.65.

1.143. На вертикальной оси укреплена горизонтальная штанга, по которой могут свободно перемещаться два груза с массами m_1 и m_2 , связанные нитью длины l . Система вращается с угловой скоростью ω . На каких расстояниях от оси будут находиться грузы в равновесии? Чему равны при этом сила натяжения нити и кинетическая энергия грузов? Вернутся ли грузы в положение равновесия, если их сместить из этого положения на малое расстояние?

1.144. Груз, подвешенный на нити длины L , равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Найти период вращения груза, если при его движении нить отклонена от вертикали на угол α .

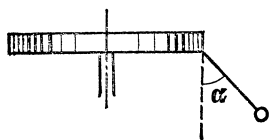


Рис. 1.66.

1.145. На вращающемся горизонтальном диске укреплен отвес, который устанавливается под углом $\alpha = 45^\circ$ к вертикали (рис. 1.66). Расстояние от точки подвеса до оси вращения $d = 10$ см, длина нити $L = 6$ см. Определить угловую скорость вращения диска.

1.146. К концу вертикального вала с помощью горизонтальной оси подвешена невесомая штанга с грузом массы $m = 10$ кг так, что

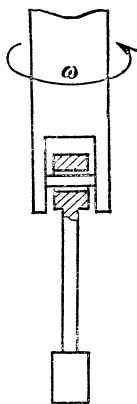


Рис. 1.67.

точка подвеса штанги находится на оси вала (рис. 1.67). Найти силу натяжения штанги, если вал вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с. Длина штанги $L = 1$ м. Как изменится сила натяжения штанги, если угловая скорость возрастет до $\omega_2 = 4$ рад/с?

1.147. На дно сферы радиуса R насыпали горсть песка. Где будут находиться песчинки после того, как сферу привели во вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω ? Трение песчинок о сферу мало.

1.148. Определить радиус R горбатого мостика, имеющего вид дуги окружности, при условии, что давление автомобиля, движущегося со скоростью $v = 90$ км/ч, в верхней точке мостика уменьшилось вдвое.

1.149. С высшей точки сферического купола вниз скользит небольшое тело. На какой высоте h тело оторвется от купола? Радиус купола равен R . Трением пренебречь.

1.150. На внутренней поверхности полого шара радиуса R , вращающегося вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω , находится маленькая шайба A (рис. 1.68). Считая угол α известным, найти минимальный коэффициент трения, при котором шайба не сорвется вниз.

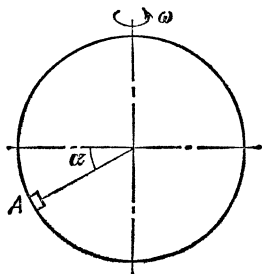


Рис. 1.68.

1.151. Какую минимальную скорость должен иметь математический маятник, проходя через положение устойчивого равновесия, чтобы он мог вращаться по окружности в вертикальной плоскости? Задачу решить для случаев: а) маятник подвешен на невесомой недеформируемой штанге; б) маятник подвешен на нерастяжимой нити.

1.152. Математическому маятнику массы m сообщили такой минимальный толчок, чтобы он совершил полный оборот в вертикальной плоскости. Какова будет сила натяжения нити маятника при прохождении положения равновесия? Трением пренебречь.

1.153. Шарик массы m , висящий на нити длины l , отводят в сторону так, что нить занимает горизонтальное положение A , и от-

пускают без толчка. Внизу на расстоянии $h = (2/3) l$ под точкой подвеса O вбит гвоздь C (рис. 1.69). Какую силу натяжения будет иметь нить в момент, когда она займет горизонтальное положение B ?

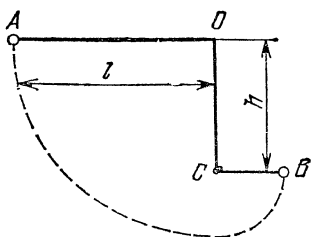


Рис. 1.69.

1.154. С какой минимальной угловой скоростью ω нужно вращать ведро в вертикальной плоскости, чтобы из него не выливалась вода? Расстояние от поверхности воды до центра вращения равно l .

1.155. Внутри камеры автомобильного колеса находится небольшое тело. Радиус колеса $R = 0,4$ м. При какой минимальной скорости автомобиля v тело будет вращаться вместе с колесом? Толщиной шины пренебречь.

1.156. Тележка массы m совершает мертвую петлю, скатываясь с минимально необходимой для этого высоты (рис. 1.70). С какой силой F тележка давит на рельсы в точке A , радиус-вектор которой составляет угол α с вертикалью? Трением пренебречь.

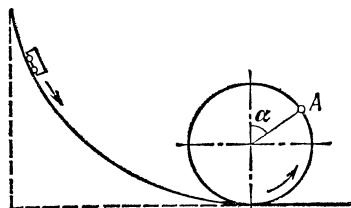


Рис. 1.70.

1.157. Небольшая тележка совершает мертвую петлю радиуса R , скатываясь с минимальной высоты, обеспечивающей прохождение всей петли.

Чему равно полное ускорение тележки в момент, когда скорость вертикальна? На какой высоте H сила давления на рельсы равна $3/2$ силы тяжести тележки? Трением пренебречь.

1.158. С какой минимальной скоростью v может ехать по горизонтальной плоскости мотоциклист, описывая дугу радиуса $R = 90$ м, если коэффициент трения резины о почву $k = 0,42$? На какой угол от вертикали он при этом отклонится?

1.159. Во сколько раз увеличится максимально допустимая скорость движения велосипедиста по наклонному треку с углом наклона α по сравнению с допустимой скоростью движения по горизонтальному треку при одинаковых радиусах закругления и коэффициентах трения k ?

1.160. Горизонтальный диск радиуса $R = 10$ м вращается вокруг своей оси с частотой $n = 2$ об/мин. Вдоль края диска навстречу вращению едет мотоциклист со скоростью $v = 30$ км/ч относительно диска. Каким должен быть коэффициент трения между шинами мотоцикла и диском, чтобы мотоцикл не соскальзывал с диска?

1.161. Какова должна быть скорость мотоциклиста, чтобы он мог ездить по внутренней вертикальной стенке цилиндра в горизонтальной плоскости, если известно, что при езде по горизонтальной поверхности с тем же коэффициентом трения минимальный радиус поворота на скорости v равен R ? Радиус цилиндра равен R_1 . Под

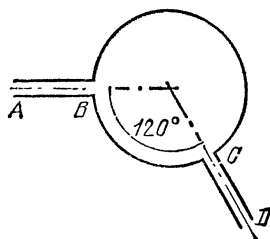


Рис. 1.71.

каким углом α к стенке цилиндра наклонится мотоциклист?

1.162. Две дороги AB и CD , направленные под углом $\alpha = 120^\circ$ друг к другу, выходят на круговую площадь радиуса $R = 68$ м (рис. 1.71). С какой максимальной скоростью может ехать по площади автомобиль, чтобы попасть с одной дороги на другую? Коэффициент трения между асфальтом и шинами автомобиля $k = 0,4$.

1.163. Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу окружности с углом $\alpha = 30^\circ$ (рис. 1.72). Радиус окружности $R = 100$ м. С какой максимальной скоростью v автомобиль может выехать на прямой участок пути? Коэффициент трения колес о землю $k = 0,3$.

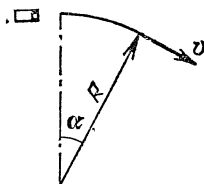


Рис. 1.72.

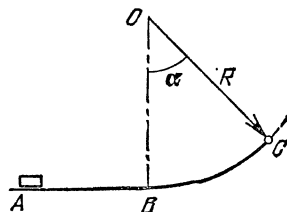


Рис. 1.73.

1.164. Гладкий желоб состоит из горизонтальной части AB и дуги окружности BC с углом $\alpha = 45^\circ$ (рис. 1.73). Радиус окружности $R = 1$ м. Тело, имеющее начальную скорость $v = 10$ м/с, скользит без трения по желобу. Определить модуль и направление ускорения тела в точке C .

1.165. Конечный участок горы разгона на лыжном трамплине представляет собой дугу окружности радиуса $R = 15$ м (рис. 1.74). Полная высота горы $H = 50$ м. Найти полное ускорение прыгуна в точке B , если угол $\alpha = 30^\circ$. Считать, что лыжник спускается из точки A без начальной скорости. Трением пренебречь.

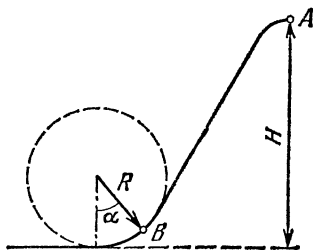


Рис. 1.74.

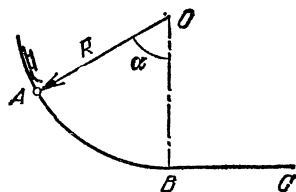


Рис. 1.75.

1.166. Спуск с горы представляет собой дугу окружности AB радиуса $R = 10$ м с плавным выездом на горизонтальную поверх-

ность BC (рис. 1.75). Поверхность горы гладкая, а горизонтальная поверхность шероховатая с коэффициентом трения $k = 0,15$. На каком расстоянии от конца горы остановятся съехавшие с нее санки, если в точке A их полное ускорение было равно по модулю ускорению свободного падения g ? Радиус, проведенный в точку A , образует с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$.

1.167. Выезд с горы на горизонтальную поверхность представляет собой дугу окружности радиуса $R = 4$ м. Поверхность горы гладкая, а горизонтальная поверхность шероховатая с коэффициентом трения $k = 0,2$. Санки, съехав с горы, остановились на расстоянии $l = 30$ м от ее конца. На какой высоте h человек испытывал двукратную перегрузку?

1.168. Один конец пружины прикреплен к гвоздю O , вбитому в стол, а другой к грузу B (рис. 1.76). Груз, скользя по столу без трения, совершает круговое движение с линейной скоростью v вокруг гвоздя. Найти радиус окружности, по которой движется груз. Длина недеформированной пружины равна l_0 . Длина пружины возрастает вдвое, если к ней прикрепить груз B . Массой пружины пренебречь и считать, что ее удлинение прямо пропорционально нагрузке.



Рис. 1.76.

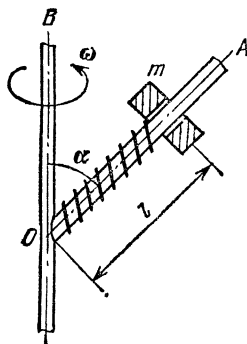


Рис. 1.77.

1.169. Стержень OA вращается относительно вертикальной оси OB с угловой скоростью ω (рис. 1.77). Угол между осью и стержнем равен α . По стержню без трения скользит муфта массы m , связанная с точкой O пружиной. Определить положение муфты при вращении. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0 , жесткость пружины равна k .

1.170. Шайба массы m двумя одинаковыми пружинами прикреплена к концам стержня, вращающегося вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину (рис. 1.78). Найти угловую скорость ω стержня, при которой возможны круговые движения шайбы. На каком расстоянии от середины стержня должна при этом находиться шайба? Жесткость пружины равна k . Трением между шайбой и стержнем пренебречь.

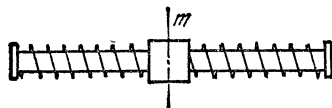


Рис. 1.78.

1.171. По «экватору» внутренней поверхности сферической оболочки массы M движется шарик массы m , совершая полный оборот за время T (с постоянной по модулю скоростью). Считая, что внеш-

них сил нет и трение отсутствует, определить, с какой силой шарик давит на сферическую оболочку. Расстояние между центром шарика и центром сферы равно a .

Тяготение. Спутники

1.172. Искусственный спутник, используемый в системе теле-связи, запущен в плоскости земного экватора так, что все время находится в зените одной и той же точки земного шара. Во сколько раз радиус орбиты спутника R больше радиуса Земли $R_3 = 6400$ км? Считать известным ускорение свободного падения у поверхности Земли: $g = 9,8$ м/с².

1.173. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и движется по круговой орбите в плоскости экватора в направлении вращения Земли. Найти отношение радиуса орбиты спутника к радиусу Земли, при котором он периодически проходит над точкой запуска ровно через двое суток. Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

1.174. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и движется по круговой орбите в плоскости экватора в направлении вращения Земли. Радиус орбиты спутника $R = 3R_3$, где $R_3 = 6400$ км — радиус Земли. Через какое время спутник в первый раз пройдет над точкой запуска?

1.175. Считая орбиты Земли и Луны приблизительно круговыми, найти отношение масс Земли и Солнца. Известно, что Луна совершает 13 обращений в течение года и что расстояние от Солнца до Земли в 390 раз больше расстояния от Луны до Земли.

1.176. Определить отношение массы Марса к массе Земли по параметрам орбиты автоматической станции «Марс-2»: максимальное удаление от поверхности (в апоцентре) $a = 25\,000$ км, минимальное (в перигентре) $p = 1380$ км, период обращения $T = 18$ ч. Радиус Марса $R_M = 3400$ км. Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

1.177. Один из спутников Юпитера движется по орбите радиуса $R_1 = 4,22 \cdot 10^5$ км и совершает полный оборот за время $T_1 = 1,77$ сут. Во сколько раз масса Юпитера больше массы Земли? Известно, что Луна движется по орбите радиуса $R_2 = 3,8 \cdot 10^5$ км с периодом $T_2 = 27,3$ сут.

1.178. Вычислить первую космическую скорость при старте с поверхности Юпитера, используя параметры орбиты спутника Юпитера Ганимеда, который движется практически по круговой орбите радиуса $R = 1 \cdot 10^6$ км с периодом $T = 7,15$ сут. Радиус Юпитера $R_{Ю} = 70\,000$ км.

1.179. На какое максимальное расстояние от Солнца удаляется комета Галлея? Период обращения ее вокруг Солнца $T = 76$ лет, минимальное расстояние, на котором она проходит от Солнца, $R_{\min} = 1,8 \cdot 10^8$ км. Радиус орбиты Земли $R_0 = 1,5 \cdot 10^8$ км.

1.180. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите радиуса $R = 3R_3$, где $R_3 = 6400$ км — радиус Земли. В результате кратковременного действия тормозного устройства скорость спутника уменьшилась так, что он начинает двигаться по эллипти-

ческой орбите, касающейся поверхности Земли (рис. 1.79). Через какое время после этого спутник приземлится?

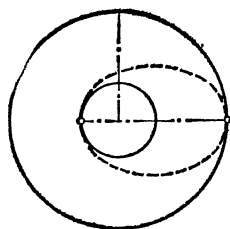


Рис. 1.79.

1.181. Две звезды под действием силы взаимного гравитационного притяжения описывают круговые орбиты вокруг их общего центра масс с периодом $T = 2$ года. Сумма масс звезд $m_1 + m_2 = 2M_{\odot}$, где M_{\odot} — масса Солнца. Найти расстояние между звездами, зная, что среднее расстояние от Земли до Солнца $R_0 = 1,5 \cdot 10^8$ км. Масса Земли пренебрежимо мала по сравнению с массой Солнца.

1.182. Для создания искусственной тяжести на пассивном участке полета две части космического корабля (отношение масс 1 : 2) разводятся на расстояние L и приводятся во вращение вспомогательными двигателями относительно их общего центра масс. Определить период вращения, если маятниковые часы в кабине космонавта, расположенной в более массивной части корабля, идут вдвое медленнее, чем на Земле.

1.183. Известно, что вследствие вращения планеты сила тяжести на экваторе меньше, чем на полюсе. На какой высоте h над поверхностью планеты на полюсе сила тяжести сравняется с силой тяжести на поверхности на экваторе? Считать планету шаром радиуса R . Время обращения планеты вокруг оси равно T , средняя плотность вещества планеты равна ρ .

1.184. Радиус одного из астероидов $R_a = 5$ км. Допустив, что плотность астероида $\rho_a = 5,5$ г/см³, найти ускорение свободного падения g_a на его поверхности. На какую высоту поднялся бы человек, находящийся на астероиде и подпрыгнувший с усилием, достаточным для прыжка на высоту 5 см на Земле? Считать, что астероид имеет форму шара.

1.185. Каково ускорение свободного падения на поверхности Солнца, если радиус Солнца в 108 раз больше радиуса Земли, а плотность относится к плотности Земли, как 1 : 4?

1.186. Подсчитать ускорение свободного падения на поверхности Солнца, если радиус земной орбиты $R_0 = 1,5 \cdot 10^8$ км, радиус Солнца $R_{\odot} = 7 \cdot 10^5$ км и время обращения Земли вокруг Солнца $T = 1$ год.

1.187. Определить минимальный период спутника нейтронной звезды. Ее плотность $\rho = 10^{17}$ кг/м³.

1.188. Спутник массы $M = 200$ кг движется по круговой орбите вокруг Земли. Его расстояние от поверхности Земли мало по сравнению с ее радиусом. Насколько можно изменить радиус орбиты, если из спутника произвести выстрел? Масса пули $m = 5$ г, ее скорость $u = 1$ км/с и противоположна по направлению скорости спутника.

1.189. Третья ступень ракеты состоит из ракеты-носителя массы $M = 50$ кг и головного защитного конуса массы $m = 10$ кг. Конус сбрасывается вперед сжатой пружиной. При испытаниях на Земле

с закрепленной ракетой пружина сообщила конусу скорость $v_0 = 5,1$ м/с. Какова будет относительная скорость конуса и ракеты, если их разделение произойдет на орбите?

1.190. Спутник, запущенный на круговую орбиту высоты $H = 500$ км над поверхностью Земли, тормозится в верхних слоях атмосферы. Угловое ускорение спутника $\beta = 3 \cdot 10^{-13}$ рад/с². На какой высоте окажется спутник через месяц? Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

1.191. Известно, что в настоящее время Луна удаляется от Земли со скоростью $v = 3,3$ см/год. Найти угловое ускорение Луны. Среднее расстояние Луны от Земли $R = 3,84 \cdot 10^5$ км, угловая скорость вращения Луны вокруг Земли $\omega = 2,56 \cdot 10^{-6}$ рад/с.

1.192. Ракета запущена с поверхности Земли вертикально вверх с первой космической скоростью и возвращается на Землю недалеко от места старта. Сколько времени она находилась в полете? Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

1.193. Космонавты, высадившиеся на Луну, должны возвратиться на базовый космический корабль, который летает по круговой орбите на высоте, равной радиусу Луны $R_L = 1700$ км. Какую начальную скорость v на поверхности Луны необходимо сообщить лунной кабине, чтобы стыковка с базовым кораблем стала возможной без дополнительной коррекции модуля скорости кабины? Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_L = 1,7$ м/с².

1.194. Космический корабль массы $M = 12$ т движется вокруг Луны по круговой орбите на высоте $h = 100$ км. Для перехода на орбиту прилунения на короткое время включается двигатель. Скорость вытекающих из сопла ракеты газов $u = 10^4$ м/с. Радиус

Луны $R_L = 1700$ км, ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_L = 1,7$ м/с².

а) Какую массу топлива необходимо израсходовать для того, чтобы при включении тормозного двигателя в точке А траектории корабль опустился на Луну в точке В (рис. 1.80, а)?

б) Какую массу топлива необходимо израсходовать для того, чтобы кораблю в точке А сообщить импульс в направлении на центр Луны и перевести его на орбиту, касающуюся Луны в точке С (рис. 1.80, б)?

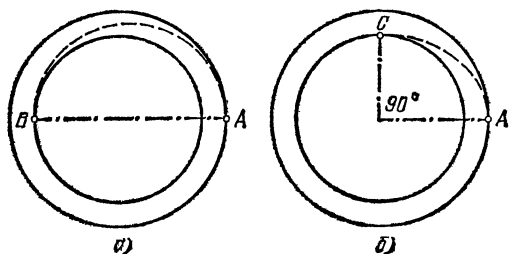


Рис. 1.80.

Применение законов механики в ядерной физике

1.195. Атом распадается на две части, массы которых оказались равными M_1 и M_2 . Определить их скорости, если общая кинетическая энергия частей равна T .

1.196. При β -распаде атома радиоактивного изотопа радия ^{228}Ra из него вылетает электрон с энергией $T_e = 0,05$ МэВ. При этом изотоп радия превращается в изотоп актиния ^{228}Ac . Какую кинетическую энергию имеет атом актиния?

1.197. Радон — это α -радиоактивный газ с атомной массой $A = 222$. Какую долю полной энергии, освобождаемой при распаде радона, уносит α -частица?

1.198. Нейтрон с энергией $T = 10^{-15}$ Дж поглощается первоначально неподвижным ядром кадмия. Определить скорость v вновь образовавшегося ядра.

1.199. Нейтрон испытывает упругое соударение с ядром гелия (α -частицей) и затем, отразившись, упруго соударяется с другим ядром гелия (при упругих соударениях суммарная кинетическая энергия сохраняется). Ядра гелия до соударения были неподвижны. Считая оба соударения центральными (скорости до и после соударения направлены вдоль линии центров соударяющихся частиц), определить, во сколько раз изменится энергия нейтрона после двух соударений.

1.200. Реакцию синтеза тяжелого (дейтерий) и сверхтяжелого (третий) изотопов водорода $^2\text{H} + ^3\text{H} = ^4\text{He} + n$ изучают, направляя ускоренные до энергии $T_D = 2$ МэВ ядра дейтерия на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно к направлению пучка ядер дейтерия. Определить энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия $Q = 14$ МэВ.

1.201. В результате взаимодействия ядер дейтерия и трития образуется ядро гелия и нейтрон: $^2\text{H} + ^3\text{H} = ^4\text{He} + n$. При этом выделяется значительная энергия. Какую часть ее уносит с собой нейтрон? Кинетическими энергиями дейтерия и трития до реакции пренебречь по сравнению с выделившейся энергией.

1.202. При захвате нейтрона ядром лития происходит ядерная реакция $^6\text{Li} + n = ^3\text{H} + ^4\text{He}$, в которой выделяется энергия $Q = 4,8$ МэВ. Найти распределение энергии между продуктами реакции. Считать кинетическую энергию исходных частиц пренебрежимо малой.

1.203. При слиянии ядер дейтерия и лития происходит ядерная реакция $^6\text{Li} + ^2\text{H} = ^7\text{Be} + n$, в которой выделяется энергия $Q = 3,37$ МэВ. Найти распределение энергии между продуктами реакции. Считать кинетическую энергию исходных частиц пренебрежимо малой.

1.204. α -частица, имеющая скорость 1000 м/с, налетает на атом углерода, который двигался до соударения в том же направлении, но со скоростью, вдвое меньшей. С какой скоростью перемещается центр масс системы соударяющихся частиц?

1.205. Ядерная реакция $^{14}\text{N} + ^4\text{He} = ^{17}\text{O} + p$ может идти, если налетающие на неподвижные ядра азота α -частицы имеют энергию, превышающую пороговую энергию $E_{\text{п}} = 1,45$ МэВ. На сколько энергия α -частиц должна быть больше пороговой, чтобы кинетическая энергия образующихся протонов была равной нулю?

1.206. В ядерной реакции ${}^7\text{Li} + p = {}^7\text{Be} + n$ протоны налетают на покоящиеся ядра лития. Если энергия налетающих протонов $E = 1,92$ МэВ, нейтроны, образующиеся в реакции, покоятся. Насколько можно уменьшить энергию налетающих протонов, чтобы реакция вообще могла бы идти?

II. ТЕПЛОТА

Тепловое расширение тел

2.1. В центре стального диска имеется отверстие диаметра $d = 4,99$ мм (при 0°C). До какой температуры следует нагреть диск, чтобы в отверстие начал проходить шарик диаметра $D = 5,00$ мм? Коэффициент линейного расширения стали $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

2.2. Стекланный шарик с коэффициентом объемного расширения β взвешивается трижды: в воздухе и в жидкости при температурах t_1 и t_2 . Показания весов при трех взвешиваниях равны P , P_1 , P_2 . Определить коэффициент объемного расширения жидкости β_1 .

2.3. Стальная и бронзовая пластинки одинаковой толщины $a = 0,2$ мм склепаны на концах так, что при температуре $T_1 = 293$ К образуют плоскую биметаллическую пластинку. Каков будет радиус изгиба этой пластинки при температуре $T_2 = 393$ К? Коэффициенты линейного расширения стали и бронзы $\alpha_1 = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ и $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

2.4. Бронзовый стержень был охлажден в жидком азоте до температуры $T_1 = 72$ К. Охлажденный стержень плотно вставили в прямоугольное отверстие жесткой обоймы, имеющей температуру $T_2 = 293$ К, так, что зазор между торцами стержня и соответствующими плоскостями отверстия обоймы можно считать равным нулю. Каким стало давление стержня на обойму после того, как он нагрелся до температуры $T_2 = 293$ К? Коэффициент линейного расширения бронзы $\alpha = 1,75 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, модуль Юнга $E = 1,04 \cdot 10^{11}$ Па.

2.5. Между двумя стенками помещен стержень сечения S , состоящий из двух частей одинаковой длины $l/2$, имеющих коэффициенты линейного расширения α_1 и α_2 и модули Юнга E_1 и E_2 . При температуре T_1 торцы стержня лишь касаются стенок. С какой силой стержень будет давить на стенки, если стержень нагреть до температуры T_2 ? Деформацией стенок пренебречь. Насколько сместится место стыка частей стержня?

2.6. Латунное кольцо диаметром в несколько сантиметров было нагрето до температуры $T_1 = 573$ К и плотно надето на стальной цилиндр, имеющий температуру $T_2 = 291$ К. Какое усилие на разрыв испытывает кольцо после охлаждения до 291 К? Коэффициент линейного расширения латуни $\alpha = 1,84 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, модуль Юнга $E = 6,47 \cdot 10^{10}$ Па. Кольцо в сечении имеет размеры $2 \times 5 \text{ мм}^2$.

Уравнение газового состояния

2.7. Какое давление создает азот массы $m = 1$ кг в объеме $V = 1$ м³ при температуре $t = 27$ °С?

2.8. Температура комнаты была $t_1 = 10$ °С. После того как печь натопили, температура в комнате поднялась до $t_2 = 20$ °С. Объем комнаты $V = 50$ м³, давление в ней $P = 97$ кПа. Насколько изменилась масса воздуха, находящегося в комнате? Молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль.

2.9. Перед вылетом пули из ствола винтовки объем, занимаемый пороховым газом (продуктами сгорания пороха), в $n = 100$ раз превышает объем твердого пороха. Температура газов в этот момент $T = 1000$ К. Молярная масса продуктов сгорания $\mu = 30$ г/моль, плотность твердого пороха $\rho = 1$ г/см³. Определить давление пороховых газов при вылете пули.

2.10. Баллон с гелием при давлении $P_1 = 6,5 \cdot 10^6$ Па и температуре $t_1 = -3$ °С имеет массу $M_1 = 21$ кг, а при давлении $P_2 = 2 \cdot 10^6$ Па и той же температуре массу $M_2 = 20$ кг. Какую массу гелия содержит баллон при давлении $P = 1,5 \cdot 10^7$ Па и температуре $t = 27$ °С?

2.11. Баллон, содержащий азот при давлении $P_1 = 1,5 \cdot 10^7$ Па и температуре $t_1 = 27$ °С, имеет массу $m_1 = 97$ кг. Когда часть азота была израсходована, так что при температуре $t_2 = -3$ °С давление в баллоне стало равным $P_2 = 6 \cdot 10^6$ Па, масса баллона с азотом стала равной $m_2 = 93,5$ кг. Какое количество азота осталось в баллоне?

2.12. Баллончик для приготовления газированной воды имеет объем $V = 5$ см³ и содержит углекислый газ при давлении $P = 15$ атм ($1,5 \cdot 10^6$ Па). Можно ли на весах с точностью взвешивания 10 мг заметить разницу в массах полного и пустого баллончиков?

2.13. Аквалангист затратил время $\tau_1 = 10$ мин на осмотр повреждения подводной части корабля. За это время давление в баллоне аквалангиста, первоначально равное $P_1 = 150$ атм ($1,5 \cdot 10^7$ Па), упало на 20 %. После этого аквалангист приступил к ремонтным работам и расход воздуха возрос в полтора раза. Через какое время τ после погружения аквалангист должен закончить работы, если давление не должно упасть ниже $P_2 = 30$ атм ($0,3 \cdot 10^7$ Па)?

2.14. Из сосуда хотят откачать водород ($P = 10^5$ Па, $T = 80$ К) с помощью адсорбционного насоса, т. е. подсоединенного к сосуду отростка с насыпанным в него адсорбентом. Масса поглощенного водорода не превышает 1/50 массы самого адсорбента. Сосуд какого объема можно откачать с помощью адсорбента массы $m = 1$ кг?

2.15. В сосуде объема $V = 1,1$ дм³ находится $m = 100$ г адсорбента и водород при температуре $t = -193$ °С и давлении $P = 2 \cdot 10^4$ Па. Адсорбент при этой температуре поглощает массу водорода, равную 1/50 массы самого адсорбента. Определить давление в сосуде P_1 , если его нагреть до температуры $t_1 = 31$ °С,

когда все молекулы водорода покинут адсорбент. Плотность адсорбента $\rho = 1 \text{ г/см}^3$.

2.16. Баллон газовой плитки объема $0,5 \text{ дм}^3$ содержит 300 г пропана (C_3H_8) при давлении $1,6 \cdot 10^6 \text{ Па}$. Что можно сказать об агрегатном состоянии пропана в баллоне?

2.17. Объем некоторой массы идеального газа при нагревании на 1 К при постоянном давлении увеличился на $1/335$ своего первоначального значения. При какой температуре находился газ вначале?

2.18. При нагревании газа при постоянном объеме на 1 К давление увеличилось на $0,2 \%$. При какой начальной температуре находился газ?

2.19. Спутник погрузился в тень Земли. При этом температура внутри спутника, равная вначале $T = 300 \text{ К}$, упала на 1% , из-за чего давление воздуха понизилось на величину $\Delta P = 10,5 \text{ гПа}$. Определить массу воздуха в спутнике, если его объем $V = 10 \text{ м}^3$.

2.20. Некоторая масса водорода занимает объем $V = 10 \text{ дм}^3$ при давлении $P = 10^7 \text{ Па}$ и температуре $t = 20^\circ\text{C}$. Какая масса водорода израсходована, если при сжигании оставшегося водорода образовалось $0,5 \text{ дм}^3$ воды?

2.21. Некоторая масса газа занимает объем V_1 при давлении P_1 и температуре T_1 . Затем газ при постоянном объеме нагревают до температуры $T_2 = 2T_1$; после этого происходит расширение газа при постоянном давлении до объема $V_2 = 4V_1$. Из получившегося состояния газ возвращают в начальное (P_1, V_1, T_1), причем так, что во время этого процесса $PV^n = \text{const}$. Определить показатель степени n .

2.22. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $P = b/V^n$, где b и n — некоторые постоянные, причем $0 < n < 1$?

2.23. Баллон, содержащий $m_1 = 1 \text{ кг}$ азота, при испытании взорвался при температуре $T_1 = 350^\circ\text{C}$. Какую массу водорода m_2 можно хранить в этом баллоне при температуре $T_2 = 20^\circ\text{C}$, имея пятикратный запас прочности?

2.24. До какой температуры нужно нагреть запаянный шар, содержащий $m = 17,5 \text{ г}$ воды, чтобы он разорвался, если известно, что стенки шара выдерживают давление не более $P = 10^7 \text{ Па}$, а объем его $V = 1 \text{ дм}^3$?

2.25. Сжиженные газы хранят в сосудах, сообщающихся с атмосферой. В одном из таких сосудов объема $V = 10 \text{ дм}^3$ находится $v = 0,5 \text{ дм}^3$ жидкого азота, плотность которого $\rho = 0,81 \text{ г/см}^3$. По ошибке сосуд плотно закупорили. Разорвется ли сосуд, когда азот испарится и нагреется до комнатной температуры? Сосуд может выдержать давление $P_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

2.26. Стекланный баллон при постоянной температуре был взвешен трижды: а) откачанный, б) заполненный воздухом при атмосферном давлении $P_{\text{в}} = 10^5 \text{ Па}$, в) заполненный неизвестным газом при давлении $P_{\text{г}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Оказалось, что $m_1 = 200 \text{ г}$,

$m_2 = 204$ г, $m_3 = 210$ г. Определить молярную массу неизвестного газа μ_r . Молярная масса воздуха $\mu_a = 29$ г/моль.

2.27. Баллон объема $V_1 = 200$ дм³ содержал азот при давлении $P_1 = 2 \cdot 10^6$ Па и температуре $T_1 = 273$ К. Когда часть газа израсходовали, новое измерение давления, проведенное при температуре $T_2 = 253$ К, дало значение $P_2 = 1,5 \cdot 10^6$ Па. Какой объем займет израсходованный газ при нормальных условиях?

2.28. Из баллона объема $V_1 = 200$ дм³, содержащего гелий при давлении $P_1 = 2 \cdot 10^6$ Па и температуре $T_1 = 273$ К, израсходовали часть газа, занявшего при нормальных условиях объем $V = 1$ м³. При повторном измерении давления в баллоне получено значение $P_2 = 1,4 \cdot 10^6$ Па. При какой температуре проведено это измерение?

2.29. Масса $m = 716$ мг органического соединения, имеющего формулу $(C_3H_6O)_n$, при давлении $P = 10^5$ Па и температуре $t = 200$ °С занимает в газообразном состоянии объем $V = 243$ см³. Найти n .

2.30. Найти формулу некоторого соединения углерода с водородом, если известно, что $m = 0,65$ г этого вещества в газообразном состоянии создает в объеме $V = 1$ дм³ при температуре $t = 27$ °С давление $P = 10^5$ Па.

2.31. Найти формулу некоторого соединения углерода с кислородом, если известно, что $m = 1$ г этого вещества в газообразном состоянии создает в объеме $V = 1$ дм³ при температуре $t = 27$ °С давление $P = 5,6 \cdot 10^4$ Па.

2.32. Шаровая молния представляет собой слабо светящийся газовый шар, свободно плавающий в воздухе. Обычно она наблюдается после грозы. Согласно одной из моделей молния состоит из идеального газа, представляющего собой комплексное соединение, каждая молекула которого содержит ион азота, связанный с несколькими молекулами воды. Температура молнии $t = 600$ °С, температура окружающего воздуха $t_0 = 20$ °С. Сколько молекул воды связывает каждый ион азота? Электроны, потерянные атомом азота, связаны с молекулами воды, так что комплексная молекула остается в целом нейтральной.

2.33. По газопроводной трубе идет углекислый газ при давлении $P = 4 \cdot 10^5$ Па и температуре $t = 7$ °С. Какова средняя скорость движения газа в трубе, если за время $\tau = 10$ мин протекает масса $m = 2$ кг углекислого газа? Площадь сечения трубы $S = 5$ см².

2.34. С какой максимальной силой прижимается к телу человека банка (применяемая в медицинской практике для лечения), если диаметр ее отверстия $D = 4$ см? В момент прикладывания к телу воздух в ней прогрет до температуры $t = 80$ °С, а температура окружающего воздуха $t_0 = 20$ °С. Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па. Изменением объема воздуха в банке (из-за втягивания кожи) пренебречь.

2.35. В цилиндре под поршнем площади $S = 100$ см² находится $m = 28$ г азота при температуре $T_1 = 273$ К. Цилиндр нагревается

до температуры $T_2 = 373 \text{ К}$. На какую высоту Δh поднимется поршень массы $M = 100 \text{ кг}$? Атмосферное давление $P_0 = 10^5 \text{ Па}$.

2.36. В цилиндре под поршнем площади $S = 100 \text{ см}^2$ находится $m = 28 \text{ г}$ азота при температуре $t_1 = 100^\circ \text{С}$. К поршню через систему блоков подвешен груз массы $M = 50 \text{ кг}$ (рис. 2.1). Цилиндр охлаждается до $t_2 = 0^\circ \text{С}$. На какую высоту Δh поднимется груз? Атмосферное давление $P_0 = 10^5 \text{ Па}$. Массой поршня пренебречь.

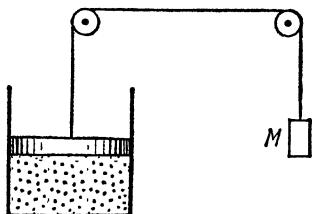


Рис. 2.1.

2.37. В вертикально расположенном цилиндре сечения S под поршнем массы m находится воздух при температуре T_1 . Когда на поршень положили груз массы M , расстояние

его от дна цилиндра уменьшилось в n раз. На сколько повысилась температура воздуха в цилиндре? Атмосферное давление равно P_0 .

2.38. В вертикально расположенном цилиндре сечения S под поршнем массы m находится воздух. На поршне лежит груз. Когда груз с поршня убрали, объем, занимаемый воздухом под поршнем, вдвое возрос, а температура этого воздуха вдвое уменьшилась. Определить массу груза M . Атмосферное давление равно P_0 .

2.39. Чтобы изотермически уменьшить объем газа в цилиндре с поршнем в n раз, на поршень поместили груз массы M . Какой массы груз следует добавить, чтобы объем газа изотермически уменьшился еще в k раз?

2.40. В вертикально расположенном цилиндре находится газ массы m . Газ отделен от атмосферы поршнем, соединенным с дном цилиндра пружиной жесткости k (рис. 2.2). При температуре T_1 поршень расположен на расстоянии h от дна цилиндра. До какой температуры T_2 надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты H ? Молярная масса газа равна μ .

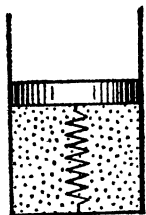


Рис. 2.2.

2.41. В цилиндре под невесомым поршнем находится газ при атмосферном давлении P_0 и температуре T_0 . Поршень удерживается упругой пружиной (рис. 2.2). Во сколько раз нужно увеличить температуру газа, чтобы его объем увеличился в полтора раза? Если газ полностью откачать из-под поршня, поршень будет находиться в равновесии у дна цилиндра.

2.42. Сосуды с объемами $V_1 = 200 \text{ см}^3$ и $V_2 = 100 \text{ см}^3$ соединены короткой трубкой, в которой имеется теплоизолирующая пористая перегородка. С помощью этой перегородки в сосудах устанавливаются одинаковые давления. Система находится при температуре $t_0 = 27^\circ \text{С}$ и содержит газ при давлении $P_0 = 10^5 \text{ Па}$. Какое давление установится в системе, если малый сосуд поместить в лед при температуре $t_2 = 0^\circ \text{С}$, а большой — в пар при температуре $t_1 = 100^\circ \text{С}$? Тепловым расширением сосудов пренебречь.

2.43. Два соединенных тонкой трубкой баллона с объемами $V_1 = 7 \text{ дм}^3$ и $V_2 = 12 \text{ дм}^3$ содержат некоторое количество азота. Первый баллон имеет неизменную температуру $t_1 = 0^\circ\text{C}$. До какой температуры надо нагреть второй баллон для того, чтобы в нем осталась только $1/3$ общего количества азота?

2.44. Два баллона с объемами $V_1 = 20 \text{ дм}^3$ и $V_2 = 10 \text{ дм}^3$ соединены тонкой трубкой и содержат $\nu = 6$ моль водорода. Первый баллон находится при температуре $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Какую температуру имеет второй баллон, если известно, что в нем содержится $m = 9 \text{ г}$ водорода?

2.45. В двух стеклянных шарах одинакового объема $V_0 = 1 \text{ дм}^3$ находится воздух при температуре $t = 0^\circ\text{C}$. Шары соединены достаточно длинной тонкой (диаметра $d = 4 \text{ мм}$) трубкой. На какое расстояние переместится капелька ртути, помещенная в трубку, если один шар нагреть до температуры $t_1 = 1^\circ\text{C}$, а другой охладить до температуры $t_2 = -1^\circ\text{C}$?

2.46. Три одинаковых сосуда, соединенные тонкими не проводящими тепло трубками, заполнены при температуре $T_1 = 4 \text{ К}$ некоторым количеством газообразного гелия. Затем один из сосудов нагрели до температуры $T_2 = 20 \text{ К}$, а второй до температуры $T_3 = 80 \text{ К}$. Температура третьего сосуда осталась неизменной. Во сколько раз изменилось давление в системе?

2.47. Внутри закрытого с обоих концов горизонтально расположенного цилиндра имеется поршень, который скользит в цилиндре без трения. С одной стороны поршня находится $m_1 = 3 \text{ г}$ водорода, а с другой $m_2 = 17 \text{ г}$ азота. Какую часть объема цилиндра занимает водород?

2.48. Вертикально расположенный цилиндр, закрытый с обеих сторон, разделен тяжелым теплонепроницаемым поршнем на две части; обе части сосуда содержат одинаковое количество воздуха. При одинаковой температуре воздуха в обеих частях $T_1 = 400 \text{ К}$ давление P_2 в нижней части сосуда вдвое больше давления P_1 в верхней части. До какой температуры T_2 надо нагреть воздух в нижней части сосуда, чтобы объемы верхней и нижней частей стали одинаковыми?

2.49. Вертикально расположенный цилиндр разделен на две равные части тяжелым теплонепроницаемым поршнем, который может скользить без трения. В верхней половине цилиндра находится водород при температуре T и давлении P , в нижней части — кислород при температуре $2T$. Цилиндр перевернули вверх дном. Чтобы поршень по-прежнему делил цилиндр на равные части, пришлось охладить кислород до температуры $T/2$. Температура водорода осталась прежней (T). Определить давление кислорода в первом и во втором случаях.

2.50. Поршни двух одинаковых цилиндров жестко связаны так, что объемы под поршнями равны между собой. В цилиндры при температуре T введен воздух таким образом, что давление в одном из цилиндров стало равным P . Затем этот цилиндр нагревается до температуры T_1 . Какое установится в нем давление? Во втором

цилиндре поддерживается температура T . Атмосферное давление равно P_0 . Массами поршней пренебречь.

2.51. Поршни двух одинаковых цилиндров жестко связаны так, что объемы под поршнями равны между собой. В оба цилиндра введена одинаковая масса воздуха при температуре T . Затем один сосуд нагревают до температуры T_1 , другой поддерживают при температуре T . Каковы будут давления в цилиндрах? Атмосферное давление равно P_0 . Массами поршней пренебречь.

2.52. Цилиндр, закрытый поршнем, соединен короткой тонкой трубкой с откачанным сосудом (рис. 2.3). Под поршень при закры-

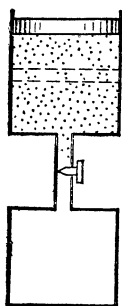


Рис. 2.3.

том кране вводится некоторое количество газа ν . Объем, занимаемый этим газом в цилиндре, равен объему сосуда. Какая часть газа останется в цилиндре после того, как кран откроют? Температуры газа в цилиндре $t_1 = -173^\circ\text{C}$, а в сосуде $t_2 = 127^\circ\text{C}$.

2.53. Цилиндр, закрытый поршнем, соединен короткой тонкой трубкой с откачанным сосудом (рис. 2.3). Объем сосуда равен V . Под поршень при закрытом кране вводится газ, занимающий объем $V/2$. Затем кран открывают, и половина газа переходит в сосуд. Найти отношение температур газа в цилиндре и в сосуде.

2.54. Два сосуда с объемами $V_1 = 50 \text{ дм}^3$ и $V_2 = 12,5 \text{ дм}^3$ соединены трубкой, в которой имеется специальный клапан, позволяющий газу просачиваться из большого сосуда в малый, если разность давлений в сосудах превышает величину $\Delta P = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Па}$. В большой сосуд вводится газ при давлении $P_1 = 10^5 \text{ Па}$ и температуре $t_0 = 27^\circ\text{C}$. Каким будет давление в малом сосуде (первоначально откачанном), если систему нагреть до температуры $t = 177^\circ\text{C}$?

2.55. В закрытом с обоих концов откачанном цилиндре подвешен на пружине скользящий без трения поршень, положение равновесия которого находится у дна цилиндра. Под поршень вводится такое количество газа, что поршень поднимается на высоту h (рис. 2.4). На какой высоте h_1 установится поршень, если этот газ нагреть от начальной температуры T до температуры T_1 ? Сила, действующая со стороны пружины на поршень, пропорциональна смещению поршня.

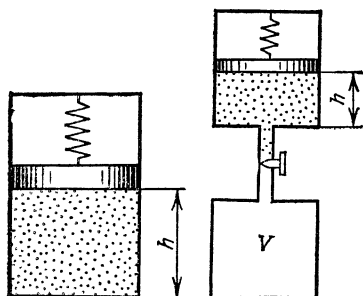


Рис. 2.4.

Рис. 2.5.

2.56. Закрытый откачанный цилиндр соединен тонкой трубкой с откачанным сосудом объема V . В цилиндре подвешен на пружине скользящий без трения поршень, положение равновесия которого находится у дна цилиндра. Под

поршень при закрытом кране вводится такое количество газа, что поршень поднимается на высоту h (рис. 2.5). На какой высоте h_1 установится поршень, если открыть кран? Площадь сечения цилиндра равна S . Температура газа постоянна. Сила, действующая со стороны пружины на поршень, пропорциональна смещению поршня.

2.57. В цилиндре длины $2l = 2$ м поршень соединен с днищами пружинами одинаковой жесткости $k = 1493$ Н/м (рис. 2.6). Вначале цилиндр откачан, пружины находятся в ненапряженном состоянии. На какое расстояние переместится поршень, если в одну из частей цилиндра ввести $m = 28$ г азота? Температура азота $T = 273$ К.

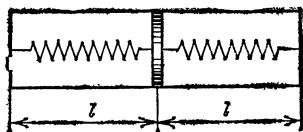


Рис. 2.6.

2.58. Цилиндр разделен на две части теплоизолирующим поршнем, связанным с каждым днищем пружиной. Вначале азот, заполняющий левую часть цилиндра, и гелий, заполняющий правую часть цилиндра, находятся при одинаковой температуре T . При этом поршень делит цилиндр пополам, а обе пружины находятся в ненапряженном состоянии. Когда азот нагрели до температуры T_1 , он занял $3/4$ цилиндра. При какой температуре T_2 азот займет $7/8$ длины цилиндра? Температура гелия равна T .

2.59. На PT -диаграмме изображен замкнутый процесс, который совершает некоторая масса кислорода (рис. 2.7). Известно, что максимальный объем, который занимал газ в этом процессе, $V_{\max} = 16,4$ дм³. Определить массу газа и его объем в точке 1. Значения T_1 , T_2 , P_1 и P_2 указаны на рисунке.

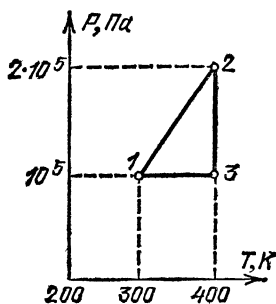


Рис. 2.7.

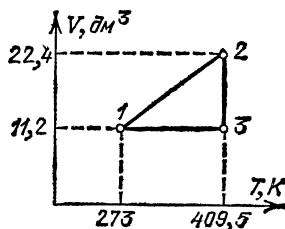


Рис. 2.8.

2.60. На VT -диаграмме изображен замкнутый процесс, который совершает некоторая масса азота (рис. 2.8). Известно, что минимальное давление газа в этом процессе $P_{\min} = 3 \cdot 10^5$ Па. Определить массу газа и его давление в точке 1. Значения T_1 , T_2 , V_1 и V_2 указаны на рисунке.

2.61. В баллоне находилось некоторое количество газа при атмосферном давлении $P_0 = 10^5$ Па. При открытом вентиле баллон

был нагрет, после чего клапан закрыли и газ остыл до начальной температуры $t_0 = 10^\circ\text{C}$. При этом давление в баллоне упало до $P = 0,7 \cdot 10^5$ Па. Каково максимальное изменение температуры баллона?

2.62. Из сосуда объема $V = 10$ дм³ воздух откачивается насосом, имеющим производительность $V_\tau = 100$ дм³/мин. До какого наилучшего вакуума может быть откачан сосуд, если из-за имеющейся в нем течи давление в откачанном сосуде поднимается на величину $\Delta P = 1$ Торр за время $\tau = 1$ ч 40 мин (при остановленном насосе)? Температуру воздуха в сосуде считать неизменной.

Примечание. Производительность вакуумных насосов принято характеризовать объемом газа, который удаляется в единицу времени из откачиваемого сосуда.

2.63. Шахта глубины $h = 224$ м пробурена в склоне горы и имеет горизонтальный выход (рис. 2.9). Температура атмосферного воздуха $t_0 = 0^\circ\text{C}$, средняя температура воздуха внутри шахты $t = 14^\circ\text{C}$. Вертикальный ствол шахты имеет сечение $S = 3,5$ м².

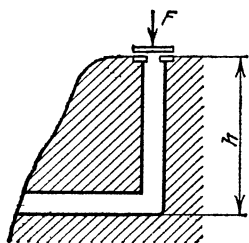


Рис. 2.9.

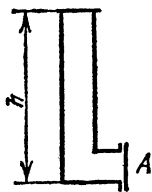


Рис. 2.10.

Какую силу нужно приложить к невесомой заслонке, чтобы закрыть сверху вертикальный ствол? Давление воздуха на уровне горизонтального ствола шахты $P_0 = 10^5$ Па.

2.64. Фабричная труба имеет высоту $h = 22,4$ м. Входное отверстие трубы наглухо закрыто заслонкой А (рис. 2.10), имеющей сечение

$S = 1$ м². Температура атмосферного воздуха $t_0 = 0^\circ\text{C}$, давление $P_0 = 10^5$ Па. Определить среднюю температуру воздуха в трубе, если известно, что из-за разности температур на заслонку действует сила $F = 85$ Н.

2.65. В простейшей модели атмосферы Марса предполагалось, что планету окружает равноплотная атмосфера, высота которой $H = 25$ км. Температура атмосферы на поверхности планеты $T = 300$ К. Какова молярная масса атмосферного газа Марса? Радиус Марса $r = 3400$ км, его масса $M = 6 \cdot 10^{23}$ кг. Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг².

2.66. В простейшей модели атмосферы Венеры предполагалось, что планету окружает равноплотная атмосфера, состоящая из углекислого газа. Какова температура атмосферы Венеры на поверхности планеты, если высота атмосферы $H = 20$ км? Радиус Венеры $r = 6200$ км, ее масса $M = 5 \cdot 10^{24}$ кг. Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг².

2.67. Масса M_τ пороха, сгорающего в единицу времени в камере ракетного двигателя, зависит от давления P по закону $M_\tau = AP^n$, где A и n — некоторые постоянные. Скорость истечения газа из сопла пропорциональна давлению в камере P . Во

сколько раз отличаются давления в камерах ракетных двигателей, если сечения их сопел равны S_1 и S_2 ? Рассмотреть случай, когда $n = 2/3$ и $S_1/S_2 = 2$.

2.68. Масса M_τ пороха, сгорающего в единицу времени в камере ракетного двигателя, зависит от давления P по закону $M_\tau = AP^n$. Найти показатель степени n , если при уменьшении сечения сопла двигателя в два раза давление в камере возрастает в четыре раза. Скорость истечения газа из сопла пропорциональна давлению в камере P .

2.69. В камере сгорания реактивного двигателя объема $V = 0,1 \text{ м}^3$ при температуре $T = 2000 \text{ К}$ давление $P = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}$. Скорость сгорания топлива $m_\tau = 30 \text{ кг/с}$, средняя молярная масса продуктов сгорания $\mu = 21 \text{ г/моль}$. Определить время пребывания порции топлива в камере сгорания.

2.70. Цилиндр сечения $S = 10 \text{ см}^2$ закрыт тяжелым поршнем. При подъеме сосуда с ускорением $2g$ объем газа под поршнем уменьшается в полтора раза. Найти массу поршня, считая температуру газа постоянной. Атмосферное давление $P_0 = 10^5 \text{ Па}$.

2.71. Цилиндр сечения $S = 10 \text{ см}^2$ закрыт поршнем массы $m = 5 \text{ кг}$. При движении сосуда вниз с ускорением $4g$ объем газа под поршнем увеличивается в два раза. Температура газа не изменилась. Найти внешнее давление P_0 .

Газовые смеси

2.72. Определить плотность смеси, содержащей $m_1 = 4 \text{ г}$ водорода и $m_2 = 32 \text{ г}$ кислорода при температуре $t = 7^\circ \text{C}$ и общем давлении $P = 10^5 \text{ Па}$.

2.73. Лазерные трубки одинакового объема $V_0 = 60 \text{ см}^3$ должны заполняться смесью гелия и неона в молярном отношении 5 : 1 при общем давлении $P_\tau = 6 \text{ Торр}$. Имеются баллоны с этими газами одинакового объема $V = 2 \text{ дм}^3$. В баллоне с гелием давление $P_1 = 50 \text{ Торр}$, в баллоне с неоном давление $P_2 = 200 \text{ Торр}$. Какое число трубок можно заполнить?

2.74. Для заполнения лазерных трубок используется смесь ксенона и гелия в молярном отношении 1 : 9 при общем давлении $P = 10 \text{ Торр}$. Имеется баллон ксенона объема $V_1 = 1 \text{ дм}^3$ при давлении $P_1 = 300 \text{ Торр}$. Сколько баллонов гелия потребуется для полного использования ксенона, если гелий содержится в баллонах объема $V_2 = 2 \text{ дм}^3$ при давлении $P_2 = 50 \text{ Торр}$?

2.75. В баллоне объема $V_1 = 16,4 \text{ дм}^3$ содержится смесь кислорода и азота общей массы $m = 120 \text{ г}$, создающая при температуре $t_1 = 17^\circ \text{C}$ давление $P_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Смесь пропускается через ловушку, содержащую раскаленные медные стружки, и закачивается в другой баллон объема $V_2 = 30 \text{ дм}^3$ при температуре $t_2 = 87^\circ \text{C}$. Какое давление P_2 будет во втором баллоне, если весь кислород соединится с медью?

2.76. В баллоне объема $V = 60 \text{ дм}^3$ содержится смесь водорода и кислорода общей массы $m = 60 \text{ г}$, создающая при температуре

$t = 27^\circ\text{C}$ давление $P = 3,28 \cdot 10^5$ Па. Какая масса воды образуется из этой смеси, если водороду дать возможность соединиться с кислородом?

2.77. В стальном баллоне находятся $m_1 = 0,2$ г водорода и $m_2 = 3,2$ г кислорода при температуре $t = 27^\circ\text{C}$. Водород соединяется с кислородом, и, после того как реакция закончится, давление внутри баллона увеличивается в три раза. Какая температура будет внутри баллона после реакции?

2.78. Сосуд разделен на две равные части полупроницаемой неподвижной перегородкой. В первую половину сосуда введена смесь аргона и водорода при давлении $P = 1,5 \cdot 10^5$ Па, во второй половине — вакуум. Через перегородку может диффундировать только водород. После окончания процесса диффузии давление в первой половине оказалось равным $P' = 10^5$ Па. Во время процесса температура поддерживалась постоянной. Определить отношение масс аргона и водорода в смеси, которая была первоначально введена в первую половину сосуда.

П р и м е ч а н и е. Полупроницаемыми называются перегородки (мембраны), через которые одни вещества могут проникать, а другие не могут. Так, через некоторые животные пленки может проникать вода, а сахар и другие органические вещества, имеющие более крупные молекулы, не проникают. Существуют полимерные пленки, проницаемые для гелия и непроницаемые для водорода. Некоторые металлы, например палладий, проницаемы только для водорода и непроницаемы для других газов.

Когда с обеих сторон от перегородки установятся (при одинаковых температурах) равные давления проникающего через нее газа, потоки газа в обе стороны выравниваются, и устанавливается динамическое равновесие. Другие газы при этом не проникают через перегородку, их парциальные давления, а следовательно, и полные давления по разные стороны от перегородки могут быть различными.

2.79. Сосуд объема $V = 2$ дм³ разделен на две равные части полупроницаемой неподвижной перегородкой. В первую половину сосуда введена смесь $m_a = 20$ г аргона и $m_b = 2$ г водорода, во второй половине — вакуум. Через перегородку может диффундировать только водород. Какое давление установится в первой половине сосуда после окончания процесса диффузии? Во время процесса поддерживалась температура $t = 20^\circ\text{C}$.

2.80. Сосуд объема $2V = 200$ см³ разделен на две равные части полупроницаемой неподвижной перегородкой. В первую половину введена смесь $m_b = 2$ мг водорода и $m_r = 4$ мг гелия, во второй половине — вакуум. Через перегородку может диффундировать только гелий. Во время процесса поддерживалась температура $T = 27$ К. Какие давления P_1 и P_2 установятся в обеих частях сосуда?

2.81. Сосуд, заполненный смесью водорода и гелия, отделен от равного ему по объему откачанного сосуда полупроницаемой неподвижной перегородкой, свободно пропускающей только молекулы гелия. После установления равновесия давление в первом со-

суде упало на 10 %. Определить отношение масс гелия и водорода. Во время процесса температура поддерживалась постоянной.

2.82. Одинаковые массы водорода и гелия поместили в сосуд объема V_1 , который отделен от откачанного сосуда объема V_2 полупроницаемой неподвижной перегородкой, свободно пропускающей только молекулы водорода. После установления равновесия давление в первом сосуде упало в два раза. Определить отношение V_2/V_1 . Во время процесса температура поддерживалась постоянной.

2.83. Цилиндр разделен подвижным, хорошо проводящим тепло поршнем на две части. В начальный момент справа от поршня находится $m = 32$ г кислорода, слева — смесь гелия и водорода. Поршень при этом расположен посередине сосуда. Поршень, непроницаемый для водорода и кислорода, оказался проницаемым для гелия. Началась диффузия гелия через поршень, в результате чего поршень начал перемещаться и окончательно расположился на расстоянии, равном $1/4$ длины цилиндра (считая от левого дна). Определить массы гелия и водорода в цилиндре.

2.84. Под тяжелый поршень, скользящий без трения внутри вертикально расположенного откачанного цилиндра, вводится смесь водорода и гелия, в результате чего поршень располагается посередине цилиндра. С течением времени поршень смещается вниз, так как материал, из которого он изготовлен, оказался проницаемым только для гелия. Окончательное положение равновесия поршня находится на $1/3$ высоты цилиндра. Каково отношение масс гелия и водорода в смеси?

2.85. Некоторая масса водорода занимает объем $V_1 = 1$ м³ при давлении $P_1 = 2 \cdot 10^5$ Па и температуре $T_1 = 250$ К. Какое давление P_2 будет иметь та же масса водорода при температуре $T_2 = 5000$ К в объеме $V_2 = 10$ м³, если при столь высокой температуре молекулы водорода полностью диссоциируют на атомы?

2.86. В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T , когда азот полностью диссоциировал на атомы, а диссоциацией водорода еще можно пренебречь, давление в сосуде равно P . При температуре $2T$, когда оба газа полностью диссоциировали, давление в сосуде равно $3P$. Каково отношение чисел атомов азота и водорода в смеси?

2.87. В сосуде объема $V = 0,5$ дм³ находится $m = 1$ г пароводяного иода (I_2). При температуре $t = 1000$ °С давление в сосуде оказалось равным $P = 9,33 \cdot 10^5$ Па. Найти степень диссоциации молекул иода (I_2) на атомы иода (I) при этих условиях. Молярная масса I_2 равна $\mu = 254$ г/моль. Степенью диссоциации называют отношение числа диссоциировавших молекул к общему числу молекул до диссоциации.

2.88. В сосуде объема $V = 1$ дм³ находится $m = 0,28$ г азота. Азот нагрет до температуры $t = 1500$ °С. При этой температуре $\alpha = 30$ % молекул азота диссоциировало на атомы. Определить давление в сосуде.

2.89. При комнатной температуре четырехокись азота частично диссоциирует на двуокись азота: $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2$. В откачанный сосуд

объема $V = 250 \text{ см}^3$ вводится $M = 0,92 \text{ г}$ жидкой четырехокси азота. Когда температура в сосуде увеличивается до $t = 27^\circ \text{C}$, жидкость полностью испаряется, а давление становится равным $P = 129 \text{ кПа}$. Какая масса четырехокси азота при этом диссоциирует?

2.90. В сосуде объема $V = 1 \text{ дм}^3$ находится $m = 0,2 \text{ г}$ углекислого газа. При температуре $T = 2600 \text{ К}$ некоторая часть молекул CO_2 диссоциировала на молекулы окиси углерода и кислорода: $2\text{CO}_2 \rightleftharpoons 2\text{CO} + \text{O}_2$. При этом давление в сосуде оказалось равным $P = 108 \text{ кПа}$. Найти степень диссоциации CO_2 при этих условиях.

2.91. Серный ангидрид в количестве $\nu_1 = 1$ моль поместили в замкнутый сосуд и нагрели до температуры $T_1 = 1000 \text{ К}$, при которой он частично диссоциировал на сернистый ангидрид и кислород: $\text{SO}_3 = \text{SO}_2 + 0,5 \text{ O}_2$. Степень диссоциации SO_3 в этих условиях оказалась равной $\alpha_1 = 0,2$. Когда в тот же сосуд поместили $\nu_2 = 0,4$ моль SO_3 , то для получения такого же, как в первом опыте, давления газ пришлось нагреть до температуры $T_2 = 2000 \text{ К}$. Определить степень диссоциации SO_3 во втором опыте.

2.92. В замкнутый сосуд поместили $\nu_1 = 1$ моль четырехокси азота. При этом произошла частичная ее диссоциация на молекулы двуокси азота: $\text{N}_2\text{O}_4 \rightleftharpoons 2\text{NO}_2$. Степень диссоциации оказалась равной $\alpha_1 = 0,2$. В сосуде установилось давление $P_1 = 2,4 \times 10^4 \text{ Па}$. Когда в тот же сосуд поместили $\nu_2 = 0,5$ моль четырехокси азота, то после установления равновесия при той же температуре, что и в первом опыте, давление оказалось равным $P_2 = 1,25 \cdot 10^4 \text{ Па}$. Определить степень диссоциации N_2O_4 во втором опыте.

Гидроаэростатика

2.93. Водный бассейн, ширина которого $a = 4 \text{ м}$, разделен перегородкой. С одной стороны уровень воды относительно дна $h_1 = 3 \text{ м}$, с другой $h_2 = 1 \text{ м}$. Найти силу F , действующую на перегородку.

2.94. В вертикально расположенном сосуде с сечениями S_1 и S_2 находятся два невесомых поршня. Поршни соединены тонкой проволокой длины l (рис. 2.11). Найти силу натяжения проволоки T , если пространство между поршнями заполнено водой. Трением пренебречь. Концы сосуда открыты в атмосферу.

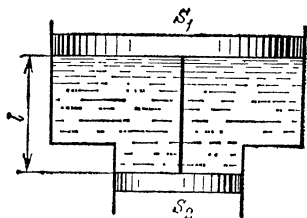


Рис. 2.11.

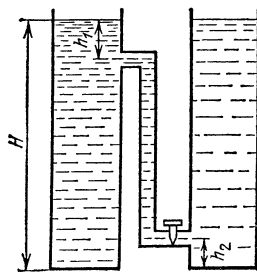


Рис. 2.12.

2.95. Два сосуда одинакового сечения соединены тонкой трубкой с краном так, как показано на рис. 2.12 ($h_1 = 0,2$ м, $h_2 = 0,02$ м). Первоначально левый сосуд заполнен водой, а правый — маслом плотности $\rho_2 = 0,8$ г/см³ до одинаковой высоты $H = 1$ м. Какими станут уровни поверхностей в сосудах после открытия крана? Решить ту же задачу в случае $h_1 = 0,02$ м.

2.96. В одном из двух сообщающихся сосудов, наполненных жидкостью при температуре $t = 20^\circ\text{C}$ до уровня $H_0 = 10$ см, температура жидкости поднялась на величину $\Delta t = 10^\circ\text{C}$. Какая возникает при этом разность уровней, если коэффициент объемного расширения жидкости $\beta = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$? Расширением сосуда пренебречь.

2.97. Два сообщающихся сосуда заполнены до высоты h жидкостью. Правый сосуд имеет постоянное сечение S ; левый сосуд до уровня h имеет сечение $2S$, а выше этого уровня — сечение S (рис. 2.13). Температура жидкости в правом сосуде поддерживается неизменной. В левом сосуде температуру повысили на величину Δt . Определить новый уровень жидкости в правом сосуде. Коэффициент объемного расширения жидкости равен β . Расширением сосудов и объемом соединительной трубки пренебречь.

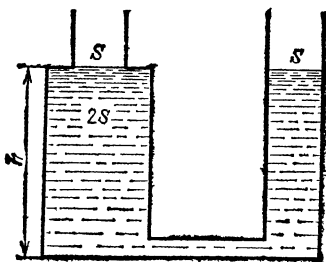


Рис. 2.13.

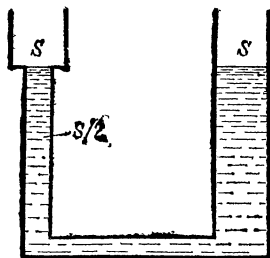


Рис. 2.14.

2.98. Два сообщающихся сосуда заполнены до высоты h жидкостью. Правый сосуд имеет постоянное сечение S ; левый сосуд до уровня h имеет сечение $S/2$, а выше этого уровня — сечение S (рис. 2.14). Температура жидкости в правом сосуде поддерживается неизменной. В левом сосуде температуру повысили на величину Δt . Определить новый уровень жидкости в правом сосуде. Коэффициент объемного расширения жидкости равен β . Расширением сосудов и объемом соединительной трубки пренебречь.

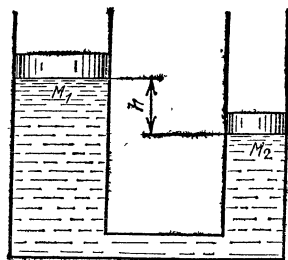


Рис. 2.15.

2.99. Два вертикальных сообщающихся цилиндра заполнены водой и закрыты поршнями с массами $M_1 = 1$ кг и $M_2 = 2$ кг. В положении равновесия первый поршень расположен выше вто-

рого на величину $h = 10$ см (рис. 2.15). Когда на первый поршень поместили гирию массы $m = 2$ кг, поршни в положении равновесия оказались на одной высоте. Как расположатся поршни, если гирию перенести на второй поршень?

2.100. Два вертикальных сообщающихся цилиндра заполнены водой и закрыты поршнями с массами $M_1 = 2$ кг и $M_2 = 3$ кг.

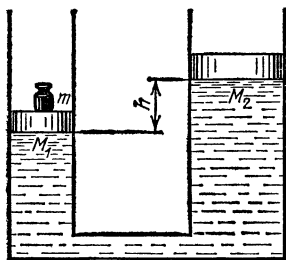


Рис. 2.16.

Когда на первый поршень поместили гирию массы $m = 1$ кг, то в положении равновесия первый поршень оказался ниже второго на величину $h = 10$ см (рис. 2.16). Когда эту гирию перенесли на второй поршень, то второй поршень оказался ниже первого на величину $h = 10$ см. Как расположатся поршни в отсутствие гири?

2.101. В вертикальную цилиндрическую трубку, закрытую снизу пористым фильтром, налит столбик ртути высоты $h = 0,1$ м. Каков радиус каналов фильтра, если ртуть начинает продавливаться через фильтр при дополнительном давлении на поверхность ртути $P_0 = 8 \cdot 10^4$ Па? Поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0,465$ Н/м.

2.102. Каково поверхностное натяжение воды, если с помощью пипетки, имеющей отверстие диаметра $d = 0,4$ мм, можно дозировать воду с точностью $0,01$ г?

2.103. Мыльный пузырь имеет радиус r . Поверхностное натяжение мыльной пленки равно σ . Каково дополнительное давление внутри мыльного пузыря?

2.104. Капля ртути массы $m = 1$ г помещена между двумя параллельными стеклянными пластинками. Какую силу надо приложить к верхней пластинке, чтобы ртуть имела форму круглой лепешки радиуса $r = 5$ см? Поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0,465$ Н/м. Считать, что ртуть совершенно не смачивает стекло, так что угол между свободной поверхностью ртути и стеклянной пластинкой равен нулю.

2.105. Капля воды массы $m = 0,01$ г введена между двумя параллельными стеклянными пластинками, полностью смачиваемыми водой. Как велика сила притяжения между пластинками, если они находятся на расстоянии $d = 10^{-4}$ см друг от друга? Поверхностное натяжение воды $\sigma = 0,073$ Н/м.

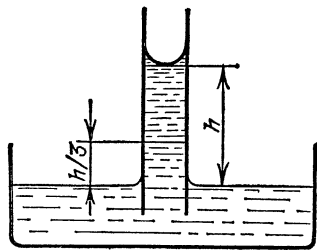


Рис. 2.17.

2.106. В вакууме в чашку с маслом, имеющим весьма низкую упругость пара и хорошо смачивающим стекло, погружена стеклянная капиллярная трубка радиуса r . Найти давление в масле на высоте $h/3$ над уровнем масла в чашке, где h — высота, на которую подни-

мается масло в капилляре (рис. 2.17). Поверхностное натяжение масла равно σ .

2.107. Баллон объема $V = 50 \text{ дм}^3$ наполнен воздухом при температуре $t = 27^\circ \text{C}$ до давления $P = 100 \text{ атм}$ (10^7 Па). Какой объем воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом этого баллона, если вытеснение производится на глубине $h = 40 \text{ м}$? Температура всего воздуха после расширения $t_1 = 3^\circ \text{C}$.

2.108. При подводных работах раньше применялся так называемый кессон («подводный колокол») — резервуар, в который по шлангу подавался воздух, вытесняющий воду (рис. 2.18). Какое время понадобится для вытеснения воды из кессона, опущенного на глубину $H = 20 \text{ м}$? Кессон представляет собой куб с ребром $l = 2 \text{ м}$. Компрессор забирает в единицу времени объем $V_\tau = 1 \text{ м}^3/\text{мин}$ атмосферного воздуха ($P_0 = 10^5 \text{ Па}$).

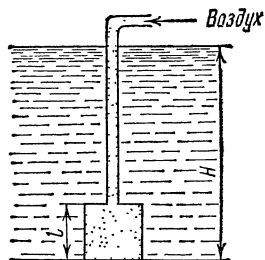


Рис. 2.18.

2.109. Цилиндрическая трубка длины l наполовину погружена в ртуть. Ее закрывают пальцем и вынимают. Часть ртути при этом вытекает. Какой длины столбик ртути остается в трубке? Длина столбика ртути, соответствующая атмосферному давлению, равна H .

2.110. В запаянную с одного конца U-образную трубку длины $2L$ налита жидкость так, что в правом запаянном колене остался воздух. Уровень жидкости в открытом колене совпадает с краем трубки. Разность между уровнями равна $L/3$ (рис. 2.19). Какую часть жидкости нужно выпустить через кран в нижней части сосуда, чтобы уровни жидкости в открытом и закрытом коленях сравнялись? Давлением паров жидкости пренебречь. Плотность жидкости равна ρ , атмосферное давление равно P_0 .

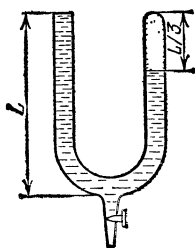


Рис. 2.19.

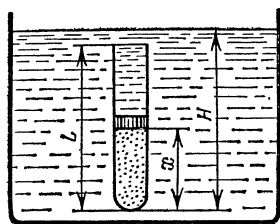


Рис. 2.20.

2.111. Пробирку длины L заполнили водородом при давлении P' , закрыли легким подвижным поршнем и погрузили в сосуд с ртутью на глубину H (рис. 2.20). Какая часть длины пробирки будет при этом заполнена водородом? При каких значениях H задача имеет решение? Плотность ртути равна ρ , атмосферное

давление равно P_0 . Температура водорода поддерживается неизменной.

2.112. Пробирка длины L погружается в воду до тех пор, пока ее дно не окажется на одном уровне с поверхностью воды (рис. 2.21).

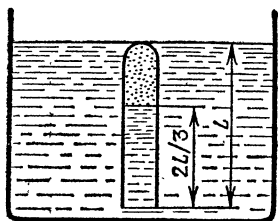


Рис. 2.21.

Когда температура воздуха в пробирке и температура воды уравнились, оказалось, что вода в пробирке поднялась на высоту $2L/3$. Найти начальную температуру воздуха в пробирке. Температура воды равна T , атмосферное давление равно P_0 .

2.113. Пробирка длины L , содержащая газ при температуре T , полностью погружена в жидкость плотности ρ , так что дно пробирки касается поверхности

жидкости. При этом жидкость заполняет половину пробирки. Пробирку поднимают вверх до тех пор, пока она не коснется поверхности жидкости своим открытым концом. Как надо изменить температуру газа в пробирке, чтобы жидкость снова заполняла половину пробирки? Атмосферное давление равно P_0 .

2.114. В мензурке высоты H и сечения S , закрытой невесомым поршнем, находится газ с молярной массой μ . Поршень опускают и освободившуюся часть мензурки до краев заливают ртутью. При каких температурах газа можно найти такое положение равновесия поршня, при котором ртуть, налитая в мензурку, не будет выбрасываться из нее давлением газа? Масса газа в мензурке равна m . Внешним давлением пренебречь.

2.115. В запаянную с одного конца U-образную трубку налита вода, причем за счет присутствия в трубке воздуха разность уровней воды оказалась равной h (рис. 2.22). Как нужно изменить тем-

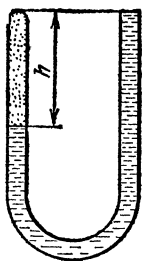


Рис. 2.22.

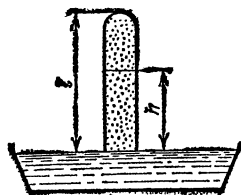


Рис. 2.23.

пературу воздуха в трубке, чтобы разность уровней воды у ее концов уменьшилась вдвое? Атмосферное давление равно P_0 . Давлением паров воды пренебречь.

2.116. Простейшая конструкция максимального термометра, «запоминающего» максимальную температуру, до которой он нагревался в процессе опыта, изображена на рис. 2.23. Стекланная

пробирка длины l приведена в соприкосновение открытым концом с поверхностью ртути в широком сосуде. Температура и давление воздуха равны T_0 и P_0 . Если пробирку нагреть до некоторой температуры T , а затем вновь охладить до температуры T_0 , то уровень ртути в пробирке поднимется на высоту h . Определить температуру T . Провести числовой расчет для $T_0 = 273$ К, $P_0 =$

$= 10^5$ Па, $l = 1$ м, $h = 0,1$ м. Давлением паров ртути пренебречь.

2.117. На рис. 2.24 изображена конструкция максимального термометра (см. задачу 2.116). Длинная U-образная трубка, запаянная с одного конца, заполнена при температуре $T_0 = 273$ К ртутью. В правом колене над ртутью находится воздух, высота столба которого $h = 24$ см. При нагревании прибора воздух, расширяясь, вытесняет часть ртути. После охлаждения до первоначальной температуры T_0 уровень ртути в левом открытом колене понизился на величину $H = 6$ см. Определить температуру, до которой нагревался прибор. Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па.

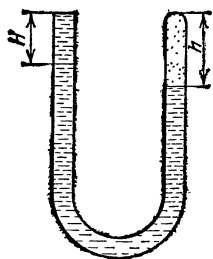


Рис. 2.24.

2.118. Поверх жидкости плотности ρ_1 налита жидкость плотности $\rho_2 < \rho_1$, причем жидкости не смешиваются. Очевидно, что тело плотности ρ ($\rho_1 > \rho > \rho_2$) будет плавать у границы раздела этих жидкостей. Какая часть объема тела будет погружена в более плотную жидкость?

2.119. В цилиндрическую банку с площадью дна S налита вода, высота столба которой $H = 15$ см. Когда в эту банку опустили порожнюю латунную чашку так, чтобы она плавала, то уровень воды поднялся на величину $h = 2,2$ см. Какова будет высота H_1 уровня воды в банке, если чашку утопить в ней? Плотность латуни $\rho_d = 8,8$ г/см³.

2.120. В бак с водой опущена длинная трубка диаметра d , к которой снизу плотно прилегает цилиндрический диск толщины h и диаметра D (рис. 2.25). Плотность материала диска ρ_d больше плотности воды ρ_v . Трубку медленно поднимают вверх. На какой глубине H диск оторвется от трубки?

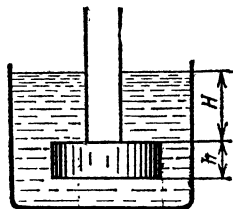


Рис. 2.25.

2.121. Тонкостенный стакан массы $M = 50$ г ставят вверх дном на поверхность воды и медленно опускают его вглубь так, что он все время остается вертикальным. На какую минимальную глубину надо опустить стакан, чтобы он утонул? Высота стакана $H = 10$ см, площадь его дна $S = 20$ см². Давлением водяного пара в стакане пренебречь. Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па.

2.122. В цилиндр высоты $h_1 = 20$ см с площадью основания $S_1 = 100$ см² налита вода, объем которой $V = 1$ дм³. В цилиндр опускают стержень сечения $S_2 = 40$ см², высота которого равна высоте цилиндра. Какую минимальную массу должен иметь стержень, чтобы он опустился на дно цилиндра? Решить ту же задачу в случае $S_2' = 80$ см².

2.123. Плотность раствора соли с глубиной h меняется по закону $\rho = \rho_0 + Ah$, где $\rho_0 = 1$ г/см³, $A = 0,01$ г/см⁴. В раствор

опущены два шарика, связанные нитью такой длины, что расстояние между центрами шариков не может превышать $l = 5$ см. Объем каждого шарика $V = 1$ см³, массы $m_1 = 1,2$ г и $m_2 = 1,4$ г. На какой глубине в равновесии находится каждый шарик?

2.124. Плотность раствора соли с глубиной h меняется по закону $\rho = \rho_0 + Ah$, где $\rho_0 = 1$ г/см³, $A = 0,02$ г/см⁴. В раствор опущены два шарика, связанные нитью. Объемы шариков $V_1 = 0,1$ см³ и $V_2 = 0,2$ см³, массы $m_1 = 0,13$ г и $m_2 = 0,34$ г. Глубина погружения первого шарика в равновесии оказалась равной $h_1 = 20$ см. Определить длину нити, связывающей шарики.

2.125. Запаянный сосуд с газом взвешен дважды — при температурах $t_1 = 0^\circ\text{C}$ и $t_2 = 17^\circ\text{C}$. Различие в результатах оказалось равным $\Delta m = 0,1$ г. Определить объем сосуда. Взвешивание проводилось при атмосферном давлении ($P_0 = 10^5$ Па). Расширение сосуда пренебречь.

2.126. Золотая пластинка толщины 0,1 мм и площади 8×10 см² взвешивается с помощью латунных гирь. При какой точности взвешивания можно заметить различие в результатах определения массы пластинки на весах в вакууме и в воздухе при давлении $P_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 17^\circ\text{C}$? Плотности золота и латуни $\rho_1 = 19,3$ г/см³ и $\rho_2 = 9,5$ г/см³.

2.127. Алюминиевая и латунная гири уравновешены в воздухе при давлении $P_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 27^\circ\text{C}$ на аналитических весах, точность взвешивания которых $m_0 = 0,1$ мг. При какой массе гирь можно заметить нарушение равновесия весов, если поместить их в вакуум? Плотности алюминия и латуни $\rho_1 = 2,7$ г/см³ и $\rho_2 = 8,5$ г/см³.

2.128. В легкой герметичной оболочке воздушного шара находится водород. Определить подъемную силу шара. Считать, что оболочка сделана из неупругого материала и может свободно растягиваться. Масса водорода равна m_2 . Молярные массы воздуха и водорода равны μ_1 и μ_2 .

2.129. Водород, содержащийся в баллоне объема $V = 100$ дм³ при давлении $P = 10^7$ Па, используется для наполнения метеорологических шаров-зондов, имеющих мягкую оболочку. Каждый шар-зонд должен иметь подъемную силу $F = 20$ Н. Сколько шаров можно наполнить водородом из одного баллона? Температура водорода в баллоне и шарах равна температуре окружающего воздуха $T = 300$ К.

2.130. Объем воздушного шара $V = 224$ м³, масса оболочки $M = 145$ кг. Шар наполнен горячим воздухом при нормальном атмосферном давлении. Какую температуру должен иметь воздух внутри оболочки, чтобы шар начал подниматься? Температура воздуха вне оболочки равна 0°C .

2.131. В одном из проектов управляемого дирижабля предлагается тепло, выделяющееся при работе двигателя, использовать для нагрева газа, наполняющего баллон дирижабля. Определить дополнительную подъемную силу для дирижабля с баллоном объема $V = 1,3 \cdot 10^6$ м³. Баллон наполнен гелием. Температура за счет

нагрева повышается от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. Давление газа в обоих случаях $P_0 = 10^5$ Па.

2.132. Балласт какой массы должен выбросить аэростат объема $V = 300$ м³, чтобы подняться с высоты, на которой барометр показывает давление $P_1 = 84$ кПа при температуре $T_1 = -15$ °С, до высоты, на которой барометр показывает давление $P_2 = 66,7$ кПа при температуре $T_2 = -30$ °С?

2.133. Чтобы не стать помехой движению самолетов, олимпийский аэростат «Миша», наполненный гелием при давлении $P_0 = 10^5$ Па и температуре $T_0 = 300$ К, должен был подняться над Лужниками на высоту $h = 1,5$ км, где плотность воздуха на 20 % меньше, чем у поверхности Земли. Найти массу M оболочки аэростата, если его объем $V = 500$ м³. Оболочка аэростата нерастяжимая и герметичная.

2.134. Сферическая оболочка воздушного шара сделана из материала, поверхностная плотность которого $\sigma = 1$ кг/м² *). Шар наполнен гелием при нормальном атмосферном давлении. При каком минимальном радиусе шар поднимет сам себя? Температуры гелия и окружающего воздуха одинаковы и равны 0 °С.

2.135. Герметичный шар-зонд, изготовленный из нерастяжимого материала, должен поднять аппаратуру массы $M = 10$ кг на высоту $h = 5,5$ км, где плотность воздуха вдвое меньше, чем у поверхности Земли. Шар наполняют гелием при температуре $T = 300$ К и давлении $P_0 = 10^5$ Па. Объем шара $V = 100$ м³. Определить поверхностную плотность материала оболочки шара.

2.136. Для удержания на поверхности Земли метеорологического шара-зонда массы $M = 20$ кг необходимо приложить силу $F = 10^3$ Н. Шар поднимается до такой высоты, где его объем увеличивается в два раза. Температура воздуха, измеренная с помощью зонда на этой высоте, оказалась равной $t = -43$ °С. Вычислить давление воздуха на указанной высоте, если у поверхности Земли давление $P_0 = 754$ Торр, а температура $t_0 = 17$ °С.

2.137. Шар-зонд, наполняемый водородом, имеет нерастяжимую герметичную оболочку объема $V = 50$ м³. Масса шара вместе с водородом $M = 5$ кг. На какую максимальную высоту сможет подняться шар-зонд, если известно, что атмосферное давление уменьшается в два раза через каждые $h = 5$ км высоты? Температура воздуха в стратосфере $t = -53$ °С, температура водорода равна температуре окружающего воздуха.

2.138. Нерастяжимая оболочка шара-зонда объема $V = 75$ м³ имеет в нижней части небольшое отверстие. Масса оболочки $m = 7$ кг. Шар наполнен водородом. На какую максимальную высоту сможет подняться шар-зонд, если известно, что атмосферное давление уменьшается в два раза через каждые $h = 5$ км высоты? Температура воздуха в стратосфере $t = -53$ °С, температура водорода равна температуре окружающего воздуха.

*) Поверхностная плотность материала — масса единицы площади этого материала.

Закон сохранения энергии в тепловых процессах

2.139. Шарик для игры в настольный теннис радиуса $r = 15$ мм и массы $m = 5$ г погружен в воду на глубину $h = 30$ см. Когда шарик отпустили, он выпрыгнул из воды на высоту $h_1 = 10$ см. Какая энергия перешла в тепло вследствие трения шарика о воду?

2.140. Бассейн площади $S = 100$ м², заполненный водой до уровня $h = 1$ м, разделен пополам перегородкой. Перегородку медленно передвигают так, что она делит бассейн в отношении 1 : 3. Какую для этого надо совершить работу, если вода не проникает через перегородку?

2.141. Два сосуда одинакового сечения $S = 10$ см² заполнены до высоты $h = 1$ м несмешивающимися жидкостями. Плотности жидкостей в сосудах $\rho_1 = 1$ г/см³ и $\rho_2 = 2$ г/см³. В тонкой трубке, соединяющей сосуды,

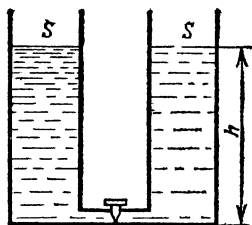


Рис. 2.26.

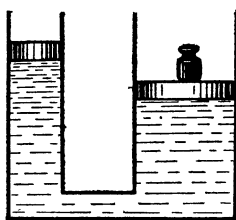


Рис. 2.27.

соединяющей сосуды, открывают кран (рис. 2.26). Какое количество тепла выделится при переходе системы в положение равновесия?

2.142. Два сообщающихся цилиндра с сечениями $S_1 = 100$ см² и $S_2 = 200$ см² заполнены водой и закрыты легкими поршнями. Система находится в равновесии. В этом положении на больший поршень помещают гирию массы $m = 1$ кг (рис. 2.27). Какое количество тепла выделится при переходе системы в новое положение равновесия?

2.143. Понтон массы $m = 1500$ кг, сечения $S = 4$ м² и высоты $h = 0,5$ м плавно опускают на воду краном. В момент, когда днище понтона коснулось воды (рис. 2.28), трос отцепили. Какое количество тепла выделится к моменту установления равновесия?

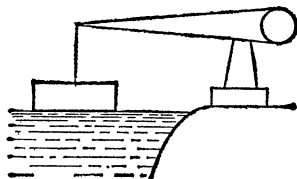


Рис. 2.28.

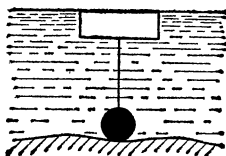


Рис. 2.29.

2.144. Понтон массы $m = 2000$ кг, сечения $S = 4$ м² и высоты $h = 1$ м с помощью тяжелого якоря, лежащего на дне, удерживается в положении, показанном на рис. 2.29 (крышка понтона находится на уровне поверхности воды). Трос, соединяющий понтон

с якорем, отцепили, и понтон всплыл. Какое количество тепла выделилось при всплытии понтона?

2.145. В стакане с водой плавает брусок высоты L и сечения S_1 . При помощи тонкой спицы брусок медленно опускают на дно стакана. Какая работа при этом совершена? Сечение стакана $S_2 = 2S_1$, начальная высота воды в стакане равна L . Плотность материала бруска $\rho = 0,5\rho_0$, где ρ_0 — плотность воды.

2.146. Свинцовая пуля пробивает деревянную стену, причем перед ударом о стену скорость пули $v_0 = 400$ м/с, а после прохождения стены ее скорость $v = 300$ м/с. Температура пули перед ударом $T_0 = 323$ К. Какая часть пули расплавилась? Удельная теплота плавления свинца $\lambda = 2,5 \cdot 10^4$ Дж/кг, температура плавления $T = 600$ К, удельная теплоемкость $c = 125$ Дж/(кг·К). Считать, что все выделяющееся тепло получает пуля.

2.147. В кастрюлю налили холодную воду ($t = 10^\circ\text{C}$) и поставили на электроплитку. Через время $\tau = 10$ мин вода закипела. Через какое время она полностью испарится?

2.148. В цилиндрический калориметр, площадь дна которого $S = 30$ см², налита вода ($V = 200$ см³) при температуре $T_1 = 303$ К и опущен кусок льда массы $m = 10$ г, имеющий температуру $T_0 = 273$ К. Определить изменение уровня воды к моменту, когда лед растает, по сравнению с моментом, когда лед уже был в калориметре. Коэффициент объемного расширения воды $\beta = 2,6 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,2 \cdot 10^5$ Дж/кг.

2.149. В цилиндре сечения S под поршнем массы M находится масса m азота при температуре T и давлении P . Какова сила трения между поршнем и стенками цилиндра, если, для того чтобы сдвинуть поршень, газу сообщили количество тепла Q ? Атмосферное давление равно P_0 , удельная теплоемкость азота при постоянном объеме равна c_V .

2.150. В теплоизолированном сосуде находится насыщенный водяной пар. Через сосуд по змеевику пропускается холодная вода (рис. 2.30). Температура воды на входе равна T_0 . Если пропускать воду со скоростью v_1 , то ее температура на выходе будет равна T_1 . Оказалось, что масса пара, конденсирующегося в единицу времени, остается прежней, если пропускать воду со скоростью v_2 . Определить температуру воды на выходе во втором случае.

2.151. На электрической плитке мощности $N = 1$ кВт кипит чайник с водой. Найти скорость истечения пара из носика чайника. Площадь сечения носика $S = 1$ см². Давление на конце носика равно атмосферному. Считать, что все тепло, выделяемое плиткой, передается воде.

2.152. Электрический утюг с терморегулятором, установленным в положение «шерсть», нагревается до температуры $t_1 = 140^\circ\text{C}$. При этом регулятор включает утюг на время $\tau = 30$ с через промежутки времени $T_1 = 5$ мин. В положении регулятора «лен» утюг

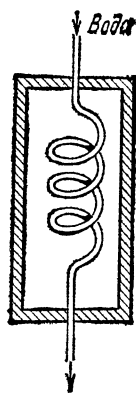


Рис. 2.30.

включается на то же время $\tau = 30$ с через более короткие промежутки $T_2 = 3$ мин. Определить температуру t_2 при регуляторе, установленном в положение «лен». Температурной зависимостью сопротивления нагревателя пренебречь. Температура в комнате $t_0 = 20^\circ\text{C}$.

2.153. Электрический утюг с терморегулятором, установленным в положение «хлопок», нагревается до температуры $t_1 = 180^\circ\text{C}$. При этом регулятор включает утюг на время $\tau_1 = 30$ с через промежутки времени $T_1 = 4$ мин. В положении регулятора «капрон» утюг включается на время $\tau_2 = 12$ с. Через какие промежутки времени T_2 происходит включение, если температура утюга в этом случае $t_2 = 80^\circ\text{C}$? Температурной зависимостью сопротивления нагревателя пренебречь. Температура в комнате $t_0 = 20^\circ\text{C}$.

2.154. В закрытом баке объема $V = 10$ дм³ содержится бензин массы $m_0 = 0,1$ г. Вычислить давление в баке после быстрого сгорания бензина, если первоначальное давление и температура в баке $P_0 = 10^5$ Па и $T_0 = 300$ К. Молярная теплоемкость газа в баке после сгорания $C = 21$ Дж/(моль·К). Удельная теплота сгорания бензина $q = 4,2 \cdot 10^7$ Дж/кг.

2.155. В герметичном сосуде объема $V = 5,6$ дм³ содержится воздух при давлении $P = 10^5$ Па. Какое давление установится в сосуде, если воздуху сообщить количество тепла $Q = 1430$ Дж? Молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме $C_V = 21$ Дж/(моль·К).

2.156. В герметичном сосуде объема $V = 11,2$ дм³ содержится воздух при давлении $P = 10^5$ Па. Какое количество тепла необходимо сообщить воздуху, чтобы давление в сосуде увеличилось в три раза? Молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме $C_V = 21$ Дж/(моль·К).

2.157. В цилиндре сечения $S = 250$ см² находится $m = 10$ г азота, сжатого поршнем, на котором лежит гиря массы $M = 12,5$ кг. Какую работу совершит газ при нагревании его от $t_1 = 25^\circ\text{C}$ до $t_2 = 625^\circ\text{C}$? Насколько увеличится при этом объем газа? Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па.

2.158. В цилиндре под поршнем находится некоторая масса воздуха. На его нагревание при постоянном давлении затрачено количество тепла $Q = 5$ кДж. Найти работу, произведенную при этом газом. Удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении $c_p = 10^3$ Дж/(кг·К). Молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль.

2.159. В цилиндре под поршнем находится некоторая масса водорода при температуре $t = 130^\circ\text{C}$, занимающая при давлении $P_1 = 2 \cdot 10^5$ Па объем $V_1 = 8$ дм³. Как изменилась температура водорода, если при неизменном давлении объем его уменьшился настолько, что при этом была совершена работа $A = 50$ Дж?

2.160. Какая масса водорода находится в цилиндре под поршнем, если при нагревании его от температуры $T_1 = 250$ К до температуры $T_2 = 680$ К газ произвел работу $A = 400$ Дж?

2.161. Какое количество тепла необходимо для нагревания $m = 7$ г азота от температуры $t_1 = 10^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 =$

$= 25\text{ }^{\circ}\text{C}$? Азот находится в цилиндре под поршнем, на котором лежит постоянный груз. Молярная теплоемкость азота при постоянном объеме $C_V = 21\text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

2.162. В цилиндре под поршнем находится $\nu = 0,5$ моль воздуха при температуре $T_0 = 300\text{ К}$. Во сколько раз увеличится объем газа при сообщении ему количества тепла $Q = 13,2\text{ кДж}$?

2.163. В цилиндре под поршнем находится $\nu = 2$ моль воздуха. Определить начальную температуру газа, если при сообщении ему количества тепла $Q = 18\text{ кДж}$ объем увеличился в 2,5 раза.

2.164. Теплоизолированный сосуд объема $V = 22,4\text{ дм}^3$ разделен тонкой непроницаемой проводящей тепло перегородкой на две равные части. В первую половину сосуда вводят $m_1 = 11,2\text{ г}$ азота при температуре $t_1 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$, во вторую $m_2 = 16,8\text{ г}$ азота при температуре $t_2 = 15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Какие давления установятся в каждой части сосуда после выравнивания температур?

2.165. Два сосуда заполнены одним газом и сообщаются при помощи узкой трубки. Отношение объемов сосудов $V_1/V_2 = 2$. Первоначально газ в первом сосуде имел температуру $T_1 = 300\text{ К}$. В результате перемешивания происходит выравнивание температур. Найти первоначальную температуру газа во втором сосуде, если конечная температура $T = 350\text{ К}$. Теплообменом газа со стенками пренебречь.

2.166. В замкнутый сосуд с газообразным азотом, находящимся при температуре $t_0 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ и давлении $P_0 = 10^5\text{ Па}$, впрыснули некоторое количество жидкого азота, который быстро испарился, после чего температура в сосуде оказалась равной $t_2 = -140\text{ }^{\circ}\text{C}$. Известно, что при впрыскивании жидкого азота его температура $t_1 = -196\text{ }^{\circ}\text{C}$ (температура кипения при нормальном давлении), а после прогрева сосуда до температуры $t_0 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ в нем установилось давление $P = 1,5 \cdot 10^5\text{ Па}$. Определить молярную теплоту испарения жидкого азота. Молярная теплоемкость газообразного азота при постоянном объеме $C_V = 20,8\text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

2.167. В замкнутый сосуд с газообразным азотом, находящимся при температуре $t_0 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ и давлении $P_0 = 10^5\text{ Па}$, впрыснули некоторое количество жидкого азота, который быстро испарился. Какое давление было в сосуде сразу после испарения жидкого азота? Известно, что при впрыскивании жидкого азота его температура $t_1 = -196\text{ }^{\circ}\text{C}$ (температура кипения при нормальном давлении), а после прогрева сосуда до температуры $t_0 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ в нем установилось давление $P = 1,3 \cdot 10^5\text{ Па}$. Молярная теплоемкость газообразного азота при постоянном объеме $C_V = 20,8\text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$. Молярная теплота испарения жидкого азота $q = 5500\text{ Дж}/\text{моль}$.

2.168. Некоторое количество газа нагревают от температуры $T_1 = 300\text{ К}$ до температуры $T_2 = 400\text{ К}$. При этом объем газа изменяется пропорционально температуре. Начальный объем газа $V_1 = 3\text{ дм}^3$. Давление, измеренное в конце процесса, оказалось равным $P_0 = 10^5\text{ Па}$. Какую работу совершил газ в этом процессе?

2.169. Моль идеального газа медленно нагревают так, что он переходит из состояния P_0, V_0 в состояние $2P_0, 2V_0$. Как при этом изменяется температура газа в зависимости от его объема, если зависимость давления газа от объема на графике изображается прямой линией? Определить работу, совершенную газом в этом процессе.

2.170. Поглощает или выделяет тепло идеальный газ при расширении, если его давление и объем связаны соотношением $P = \alpha V$? Найти подведенное к молью газа (или отведенное от него) количество тепла, если в таком процессе температура газа возросла на величину ΔT , малую по сравнению с начальной температурой газа. Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V = 5R/2$.

2.171. Температура некоторой массы m идеального газа с молярной массой μ меняется по закону $T = \alpha V^2$. Найти работу, совершенную газом при увеличении объема от V_1 до V_2 . Поглощается или выделяется тепло при таком процессе?

2.172. Некоторую массу m идеального газа с молярной массой μ нагревают в цилиндре под поршнем так, что температура изменяется пропорционально квадрату давления ($T \sim P^2$) от первоначальной температуры T_1 до конечной температуры T_2 . Определить работу, совершенную газом в этом процессе.

2.173. Состояние моля идеального газа изменялось вначале по изобаре 1—2, а затем по изохоре 2—3 (рис. 2.31). При этом газом совершена работа A . Отношение давлений в состояниях 2 и 3 задано: $P_2/P_3 = k$. Известно, что температура в конечном состоянии 3 равна температуре в состоянии 1. Определить эту температуру.

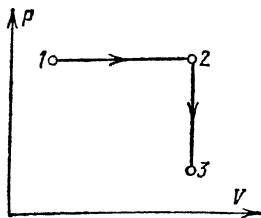


Рис. 2.31.

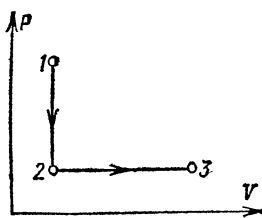


Рис. 2.32.

2.174. Состояние моля идеального газа изменялось вначале по изохоре 1—2, а затем по изобаре 2—3 (рис. 2.32). При этом газом совершена работа A . Известно, что температура в конечном состоянии 3 равна температуре в состоянии 1. Определить отношение давлений в состояниях 1 и 2.

2.175. Моль идеального газа, первоначально находившийся при нормальных условиях, переводят в состояние с вдвое большими объемом и давлением. Процесс перевода складывается из двух участков — изобары и изохоры. Какое количество тепла подведено к газу? Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V = 21 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

2.176. Моль идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 3 по изохоре 1—2, а затем по изобаре 2—3 (рис. 2.33). На изохоре газу сообщается такое же количество тепла $Q = 3675$ Дж, какое выделяется на изобаре. Найти конечную температуру газа. Начальная температура газа $t_1 = 27^\circ\text{C}$. Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V = 21$ Дж/(моль·К).

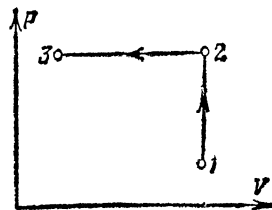


Рис. 2.33.

2.177. Моль идеального одноатомного газа переводится из начального состояния с температурой $T = 300$ К в состояние, в котором его температура увеличилась в три раза, а объем уменьшился в два раза. Найти подведенное к газу количество тепла. Известно, что из всех путей перевода газа из начального состояния в конечное, на которых давление не падает ниже начального, был выбран путь, на котором над газом совершена минимальная работа.

2.178. Моль идеального двухатомного газа переводится из начального состояния с температурой $T = 300$ К в состояние, в котором его температура уменьшилась в три раза, а объем увеличился в два раза. Найти отведенное от газа количество тепла. Известно, что из всех путей перевода газа из начального состояния в конечное, на которых давление не превышает начального, был выбран путь, на котором газ совершил максимальную работу.

2.179. Моль идеального газа находится в цилиндре под поршнем при температуре T_1 . Газ при постоянном давлении нагревают до температуры T_2 , затем при постоянном объеме нагревают до температуры T_3 . Далее газ охлаждают при постоянном давлении так, что его объем падает до первоначального значения. Наконец, при постоянном объеме газ возвращают в первоначальное состояние. Таким образом, над газом совершают замкнутый цикл. Какую работу совершил газ за цикл?

2.180. Над моль идеального газа совершают замкнутый цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 2.34). Температуры в точках 1 и 3 равны T_1 и T_3 . Определить работу, совершенную газом за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

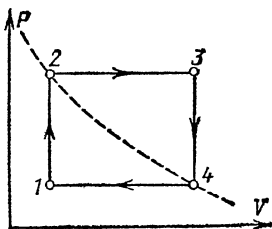


Рис. 2.34.

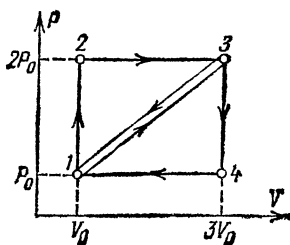


Рис. 2.35.

2.181. На рис. 2.35 изображены два замкнутых цикла: 1—2—3—1 и 1—3—4—1. Оба цикла проведены с идеальным одноатомным газом. У какого из циклов к. п. д. выше и во сколько раз?

2.182. В вертикально расположенном теплоизолированном цилиндре может перемещаться тяжелый поршень. В начальный момент поршень закреплен, в верхней части сосуда — вакуум, а нижняя часть заполнена идеальным газом. Затем поршень освобождается. После установления равновесия объем, занимаемый газом, оказался в два раза меньше первоначального. Во сколько раз изменилась температура газа? Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V = 5R/2$. Теплоемкостью сосуда пренебречь.

2.183. Теплоизолированный сосуд откачан до глубокого вакуума. Окружающий сосуд одноатомный идеальный газ имеет температуру T_0 . В некоторый момент открывают кран, и происходит заполнение сосуда газом. Какую температуру T будет иметь газ в сосуде после его заполнения?

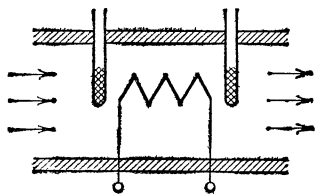


Рис. 2.36.

2.184. В проточном калориметре исследуемый газ пропускают по трубопроводу и нагревают электронагревателем (рис. 2.36). При этом измеряют количество газа, пропускаемое через трубопровод в единицу времени, и температуру газа перед и за нагревателем.

Определить мощность нагревателя N . При продувании воздуха в калориметре температура за нагревателем оказалась на величину $\Delta T = 5$ К выше, чем перед нагревателем. Массовый расход воздуха $m_t = 720$ кг/ч. Считать, что все тепло, выделяемое нагревателем, отдается газу.

2.185. Одной из причин понижения температуры в атмосфере с высотой является расширение воздуха в восходящих потоках без теплообмена с окружающей средой. Считая воздух идеальным газом, найти понижение температуры на каждые $h = 100$ м высоты.

Насыщенные и ненасыщенные пары

2.186. Какая масса ртути содержится в единице объема воздуха зараженного ртутью помещения при температуре $t = 20^\circ\text{C}$, если давление насыщенного пара ртути при этой температуре $P = 0,15$ Па? Молярная масса ртути $\mu = 200$ г/моль.

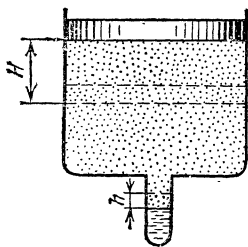


Рис. 2.37.

2.187. В оторостке сосуда, закрытого поршнем, находится некоторая масса воды в равновесии с насыщенным паром. Диаметры сосуда и оторостка $D = 5$ см и $d = 2$ мм. Поддерживая температуру равной $t = 20^\circ\text{C}$, поршень опускают на высоту $H = 10$ см; уровень воды в оторостке при этом повышается на вы-

соту $h = 1$ мм (рис. 2.37). Определить давление насыщенного пара воды при $t = 20^\circ\text{C}$.

2.188. В запаянной трубке объема $V = 0,4$ дм³ находится водяной пар при давлении $P_1 = 8$ кПа и температуре $t_1 = 150^\circ\text{C}$. Какая масса воды сконденсируется на стенках трубки при охлаждении ее до температуры $t_2 = 22^\circ\text{C}$? Давление насыщенного пара воды при $t_2 = 22^\circ\text{C}$ $P_2 = 2,5$ кПа.

2.189. В сосуд объема $V = 10$ дм³ поставили блюдце, содержащее $m = 1$ г воды. После этого сосуд герметически закрыли и оставили при температуре $t = 20^\circ\text{C}$, при которой давление насыщенного пара воды $P = 2,33$ кПа. Какая часть воды испарится?

2.190. В откачанном герметически закрытом сосуде объема $V = 10$ дм³ находится открытая колбочка, содержащая $m = 10$ г воды. Сосуд прогревают при температуре $t = 100^\circ\text{C}$. Какая масса воды испарится?

2.191. Под поршнем цилиндра объема $V = 10$ дм³ находится $m = 1,9$ г газообразного аммиака. Цилиндр помещен в термостат при температуре $t = -57^\circ\text{C}$. Какая масса аммиака сконденсируется при сжатии газа поршнем до объема $V/2$? Давление насыщенного пара аммиака при температуре $t = -57^\circ\text{C}$ $P = 26,7$ кПа. Молярная масса газообразного аммиака $\mu = 17$ г/моль.

2.192. Термос заполнен кипящей водой и герметически закрыт крышкой. Какая сила потребуется (после охлаждения термоса) для того, чтобы вытащить пробку диаметра $D = 3$ см? Трением пренебречь. Давление пара над остывшей водой мало.

2.193. В цилиндре под поршнем сечения $S = 100$ см² находится $m = 18$ г воды при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$ (рис. 2.38). Цилиндр нагревается до температуры $t = 200^\circ\text{C}$. На какую высоту поднимется поршень с лежащим на нем грузом массы $M = 100$ кг? Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па. Давление насыщенного пара при температуре $t = 200^\circ\text{C}$ $P_n = 1,6 \cdot 10^6$ Па.

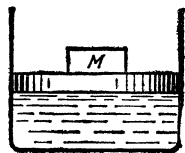


Рис. 2.38.

2.194. На какой максимальной высоте в горах можно сварить яйцо в открытой кастрюле? Белок свертывается при температуре $t = 80^\circ\text{C}$. Давление насыщенного пара воды меняется на 10 % при изменении температуры на величину $\Delta t = 2,5^\circ\text{C}$. Атмосферное давление меняется на 10 % при подъеме на высоту $\Delta h = 700$ м.

2.195. Сосуд объема $V = 20$ дм³ разделен тонкой подвижной перегородкой на две части. В левую часть помещена вода ($\nu_v = 1$ моль), в правую — азот ($\nu_a = 0,5$ моль). Температура поддерживается равной $t = 100^\circ\text{C}$. Определить объем правой части сосуда.

2.196. Сосуд объема $V = 120$ дм³ разделен тонкой подвижной перегородкой на две части. В левую часть помещена вода ($\nu_v = 2$ моль), в правую — азот ($\nu_a = 1$ моль). Температура поддерживается равной $t = 100^\circ\text{C}$. Определить объем правой части сосуда.

2.197. В закрытом цилиндре объема $V = 1$ дм³ свободно ходит невесомый тонкий поршень. В пространство под поршнем вводится

$m_a = 1$ г воды, в пространство над поршнем $m_a = 2$ г азота. Какую часть объема цилиндра займет азот при температуре $t = 100$ °C?

2.198. В сосуд с небольшим отверстием, имеющий температуру $t_1 = 76$ °C, налито немного воды, давление насыщенного пара которой при этой температуре $P = 4 \cdot 10^4$ Па. Затем сосуд закупоривают и погружают в жидкий воздух, кипящий при температуре $T_2 = 80$ К. Каково будет давление в сосуде? Давлением насыщенного водяного пара при температуре $T_2 = 80$ К пренебречь. Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па.

2.199. В вертикально расположенном цилиндре под поршнем массы $M = 10$ кг находится некоторое количество воздуха, воды и водяного пара при температуре $t = 100$ °C. В положении равновесия поршень отстоит от дна цилиндра на расстояние $h = 20$ см. Когда цилиндр расположили горизонтально, поршень занял новое положение равновесия, переместившись на расстояние $\Delta h = 3$ см от первоначального положения. Какая масса воды была на дне сосуда? Площадь поршня $S = 400$ см². Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па.

2.200. В сосуд объема $V = 10$ дм³, наполненный сухим воздухом при давлении $P_0 = 10^5$ Па и температуре $t_0 = 0$ °C, вводят $m = 3$ г воды. Сосуд нагревают до температуры $t = 100$ °C. Каково давление влажного воздуха в сосуде при этой температуре?

2.201. В камеру объема $V = 1$ дм³, сообщающуюся с воздухом при температуре $t = 20$ °C и давлении $P_0 = 10^5$ Па, бросают кусочек сухого льда массы $m = 0,5$ г. Камеру сразу же герметически закрывают. Определить давление в камере после установления равновесия при неизменной температуре. Давление насыщенного пара углекислоты при температуре $t = 20$ °C $P_n = 5,65 \cdot 10^6$ Па.

2.202. В сосуде объема $V = 10$ дм³ находятся воздух и небольшое количество воды. При температуре $t_0 = 27$ °C, когда давление насыщенного пара воды $P_{n0} = 3,6$ кПа, давление в сосуде равно атмосферному ($P_0 = 100$ кПа). Сосуд закрыт клапаном площади $S = 1$ мм², который удерживается пружиной с силой $F = 0,1$ Н. Сосуд медленно нагревают, и при температуре $t = 95$ °C, когда еще не вся вода испарилась, клапан открывается. Каково давление насыщенного пара воды при температуре $t = 95$ °C? Объемом воды по сравнению с объемом сосуда пренебречь.

2.203. В сосуде объема $V = 10$ дм³ находятся воздух и $m = 3,5$ г воды. При температуре $t_0 = 7$ °C, когда давление насыщенного пара воды пренебрежимо мало, давление в сосуде равно атмосферному ($P_0 = 10^5$ Па). Сосуд закрыт клапаном площади $S = 1$ мм², который удерживается пружиной с силой $F = 0,1$ Н. Сосуд медленно нагревают. При какой температуре откроется клапан, если известно, что к моменту открытия клапана вся вода превращается в пар?

2.204. Относительная влажность воздуха, заполняющего сосуд объема $V = 0,7$ м³, при температуре $t = 24$ °C $\alpha = 60$ %. Какую массу воды нужно испарить в этот объем до полного насыщения

пара? Давление насыщенного пара воды при этой температуре $P = 3$ кПа.

2.205. В сосуде объема $V = 100$ дм³ при температуре $t = 30$ °C находится воздух с относительной влажностью $\alpha_1 = 30$ %. Какова будет относительная влажность α_2 , если в сосуд ввести $m = 1$ г воды? Давление насыщенного пара воды при этой температуре $P = 4,24$ кПа.

2.206. Смешали $V_1 = 1$ м³ воздуха с относительной влажностью $\alpha_1 = 20$ % и $V_2 = 2$ м³ воздуха с относительной влажностью $\alpha_2 = 30$ %. При этом обе порции были взяты при одинаковых температурах. Смесь занимает объем $V = 3$ м³. Определить ее относительную влажность.

2.207. Температура воздуха в комнате $t_1 = 14$ °C, относительная влажность $\alpha_1 = 60$ %. В комнате затопили печь, и температура воздуха повысилась до $t_2 = 22$ °C. При этом некоторая часть воздуха вместе с содержащимся в нем водяным паром ушла наружу и давление в комнате не изменилось. Определить относительную влажность воздуха при температуре $t_2 = 22$ °C. Давления насыщенного пара при температурах $t_1 = 14$ °C и $t_2 = 22$ °C $P_1 = 1,6$ кПа и $P_2 = 2,67$ кПа.

2.208. В цилиндре объема $V_1 = 10$ дм³ под поршнем находится влажный воздух при температуре $t = 20$ °C и давлении $P_1 = 13,3$ кПа. Относительная влажность воздуха $\alpha = 70$ %. Каково будет давление P_2 в цилиндре, если объем при той же температуре уменьшить в 10 раз? Давление насыщенного пара воды при температуре $t = 20$ °C $P = 2,4$ кПа.

2.209. Какова была относительная влажность воздуха под поршнем при температуре $t_1 = 20$ °C и давлении $P_1 = 10^5$ Па, если конденсация воды из этого воздуха при температуре $t_2 = 100$ °C началась при давлении $P_2 = 6 \cdot 10^6$ Па? Давление насыщенного пара воды при температуре $t_1 = 20$ °C $P = 2,33 \cdot 10^3$ Па.

2.210. Воздушный резиновый шарик надувают в комнате при температуре $t_1 = 22$ °C. Насколько изменится объем шарика, если его вынести на улицу, где температура $t_2 = 1$ °C? Считать, что водяной пар в воздушном шарике находится в насыщенном состоянии. Давление насыщенного пара при температуре $t_1 = 22$ °C $P_1 = 20$ Торр, при температуре $t_2 = 1$ °C $P_2 = 5$ Торр. Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па. Давлением резиновых стенок шарика пренебречь.

2.211. В запаянной с одного конца горизонтально лежащей трубке находится воздух с относительной влажностью $\alpha_1 = 0,6$, отделенный от атмосферы столбиком ртути высоты $l = 3,8$ см. Какой станет относительная влажность α_2 , если трубку поставить вертикально открытым концом вверх? Температура поддерживается постоянной. Атмосферное давление $P_0 = 760$ Торр.

2.212. В откачанный сосуд объема $V = 500$ см³ ввели водород до давления $P_v = 266$ гПа при температуре $t = 20$ °C. В другой такой же сосуд ввели кислород до давления $P_k = 133$ гПа при той же температуре. Оба сосуда соединили и, после того как газы

перемешались, пропустили электрическую искру, гремучая смесь сгорела. Какая масса воды сконденсировалась на стенках сосуда после того, как установка приняла первоначальную температуру? Давление насыщенного пара воды при температуре $t = 20^\circ\text{C}$ $P = 23$ гПа.

2.213. Взрывная камера заполняется смесью кислорода и водорода при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $P_1 = 10^5$ Па. Парциальные давления кислорода и водорода в камере одинаковы. После герметизации камеры производится взрыв. Найти давление внутри камеры после охлаждения продуктов реакции до температуры $T_2 = 373$ К.

2.214. Взрывная камера заполняется смесью метана и кислорода при комнатной температуре и давлении $P_1 = 10^5$ Па. Парциальные давления метана и кислорода в камере одинаковы. После герметизации камеры производится взрыв. В камере проходит реакция $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 = \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$. Найти давление внутри камеры после охлаждения продуктов реакции до первоначальной температуры, при которой давление насыщенного пара воды $P = 23$ гПа.

2.215. В сосуде укреплена неподвижная перегородка, по обе стороны от которой помещают подвижные поршни (рис. 2.39). Левая часть сосуда содержит по $1/2$ моль азота и водорода, правая часть — 1 моль воды. Температура системы $t = 100^\circ\text{C}$. Перегородка проницаема для водорода, а для остальных газов непроницаема. Определить объем V левой части сосуда после установления равновесия. Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па.

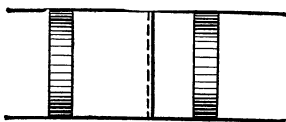


Рис. 2.39.

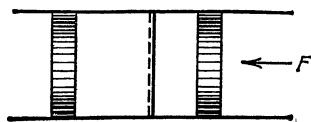


Рис. 2.40.

2.216. В сосуде укреплена неподвижная перегородка, по обе стороны от которой помещают подвижные поршни (рис. 2.40). Левая часть сосуда содержит по 1 моль водорода и азота, правая часть — 3 моль воды. Температура системы $t = 100^\circ\text{C}$. Перегородка проницаема для водорода и непроницаема для остальных газов. Определить силу F , которую надо приложить к правому поршню, чтобы удержать его в положении, при котором объем правой части сосуда составляет $V = 81,6$ дм³. Сечение сосуда $S = 1000$ см². Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па.

2.217. Когда плотность водяного пара в воздухе больше (и во сколько раз) — после месяца затяжных дождей с мокрым снегом в ноябре при температуре $t_1 = 0^\circ\text{C}$ и относительной влажности $\alpha_1 = 95\%$ или после месяца сухой жары в июле при температуре $t_2 = 35^\circ\text{C}$ и относительной влажности $\alpha_2 = 40\%$? Давления насыщенного пара при $t_1 = 0^\circ\text{C}$ $P_1 = 4,6$ Торр, при $t_2 = 35^\circ\text{C}$ $P_2 = 42$ Торр.

2.218. Во сколько раз плотность водяного пара под крышкой кастрюли, в которой кипит жирный бульон, больше плотности масляного пара? Давление насыщенного пара масла при температуре $t = 100^\circ\text{C}$ $P_m = 120$ Па. Молярная масса масла $\mu_m = 80$ г/моль.

2.219. Приготовление пищи в кастрюле-скороварке идет при температуре $t = 120^\circ\text{C}$. При такой температуре давление насыщенного водяного пара $P = 2 \cdot 10^5$ Па. Во сколько раз плотность пара в таких условиях больше, чем над поверхностью кипящей воды в открытой кастрюле?

2.220. Давление насыщенного водяного пара при температуре $t = 36^\circ\text{C}$ $P = 44,6$ Торр. Определить плотность воздуха с относительной влажностью $\alpha = 80\%$ при этой температуре и давлении $P_0 = 760$ Торр.

2.221. Определить отношение плотностей сухого воздуха и воздуха с относительной влажностью $\alpha = 50\%$. Обе порции взяты при атмосферном давлении ($P_0 = 10^5$ Па) и температуре $t = 20^\circ\text{C}$. Отношение молярных масс пара и воздуха $\mu_n/\mu_v = 0,6$. Давление насыщенного водяного пара при этой температуре $P = 23$ гПа.

2.222. Два шара-зонда одинакового объема $V = 1$ м³ заполняют воздухом при температуре $T = 373$ К и давлении $P_0 = 10^5$ Па. Подъемные силы шаров — один из которых заполнен сухим воздухом, а другой влажным — отличаются на величину $\Delta F = 0,72$ Н. Определить относительную влажность воздуха во втором шаре.

2.223. Деталь, изготовленная из алюминия, взвешивается на аналитических весах с помощью латунных гирь. Один раз взвешивание производится в сухом воздухе, второй раз — во влажном при давлении водяного пара $P_v = 15,2$ Торр. Давления ($P_0 = 760$ Торр) и температуры ($t = 20^\circ\text{C}$) в обоих случаях одинаковы. При какой массе детали можно заметить разницу в показаниях весов, если их чувствительность $m_0 = 0,1$ мг? Плотности алюминия и латуни $\rho_1 = 2,7$ г/см³ и $\rho_2 = 8,5$ г/см³.

2.224 В ведре находится смесь воды со льдом. Масса смеси $m = 10$ кг. Ведро внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившийся график зависимости $t(\tau)$ изображен на рис 2.41. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,2 \cdot 10^5$ Дж/кг. Какая масса льда была в ведре, когда его внесли в комнату? Теплоемкостью ведра пренебречь.

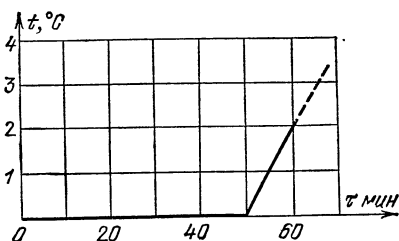


Рис 2.41

2.225 В цилиндре под поршнем находится водяной пар при температуре $t = 100^\circ\text{C}$ и давлении $P_0 = 10^5$ Па. Начальный объем пара $V = 20$ дм³. При постоянном атмосферном давлении поршень опускается так, что объем пара уменьшается вдвое. Какое количество тепла надо отвести от цилиндра, чтобы температура пара

осталась прежней? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь. Удельная теплота испарения воды при температуре $t = 100^\circ\text{C}$ $q = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

2.226. В цилиндре под невесомым поршнем площади $S = 100\text{ см}^2$ находится масса $M = 1$ кг воды при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$. В цилиндре включают нагреватель мощности $N = 500$ Вт. Через какое время поршень поднимется на высоту $h = 1\text{ м}$? Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па. Удельная теплота испарения воды $q = 2,26 \times 10^6$ Дж/кг. Теплоемкостью цилиндра и теплоотдачей пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К).

2.227. В цилиндре под невесомым поршнем площади $S = 100\text{ см}^2$ находится $m = 18$ г насыщенного водяного пара. В цилиндр впрыскивают $M = 18$ г воды при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$. На какую высоту опустится поршень? Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па. Теплоемкостью цилиндра и теплоотдачей пренебречь.

2.228. В цилиндре под невесомым поршнем находится $V = 1\text{ м}^3$ насыщенного водяного пара. Какую массу воды при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$ надо впрыснуть в цилиндр, чтобы весь пар сконденсировался? Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па. Теплоемкостью цилиндра и теплоотдачей пренебречь.

2.229. В цилиндре под невесомым поршнем находится $M_1 = 1$ кг воды при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$. В воду опускают кусок железа массы $M_2 = 1$ кг, нагретый до температуры $t = 1100^\circ\text{C}$. На какую высоту поднимется поршень? Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па. Удельная теплоемкость железа $c = 500$ Дж/(кг·К). Площадь поршня $S = 1000\text{ см}^2$. Теплоемкостью цилиндра и теплоотдачей пренебречь.

2.230. Приготовление пищи в кастрюле-скороварке ведется при температуре $t = 108^\circ\text{C}$ и повышенном давлении. Какая часть воды

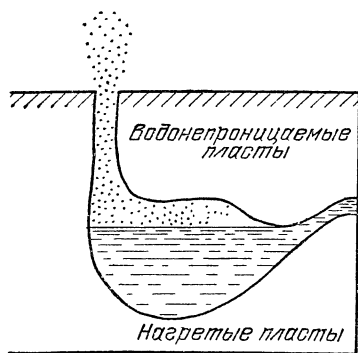


Рис. 2.42.

испарится после разгерметизации скороварки? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота испарения воды $q = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Теплообменом за время установления равновесия пренебречь.

2.231. Гейзеры могут рассматриваться как большие подземные резервуары, наполненные грунтовой водой и прогреваемые земным теплом (рис. 2.42). Выход из них на поверхность Земли осуществляется через узкий канал, который в «спокойный» период практически полностью заполнен водой. «Ак-

тивный» период наступает, когда закипает вода в подземном резервуаре; во время извержения канал заполнен только паром, который выбрасывается наружу. Оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения. Глубина ка-

нала $h = 90$ м, удельная теплота испарения воды $q = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К). Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры задана рис. 2.43.

Элементы молекулярной и атомной физики *)

2.232. Кристаллическая решетка железа при комнатной температуре — кубическая объемноцентрированная. Атомы железа расположены в вершинах куба и в центре — на пересечении пространственных диагоналей куба (рис. 2.44). Сколько атомов железа приходится на одну элементарную ячейку? Определить постоянную решетки (ребро куба) a и минимальное расстояние между атомами железа. Атомная масса железа $A = 55,9$, его плотность $\rho = 7,87$ г/см³.

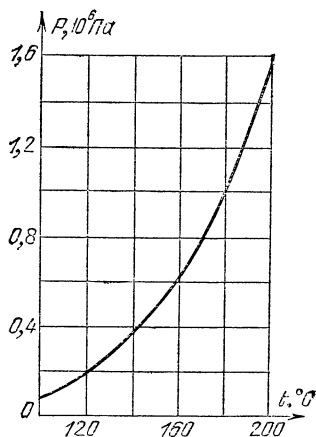


Рис. 2.43.

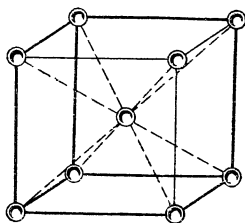


Рис. 2.44.

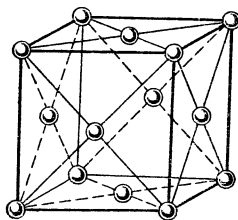


Рис. 2.45.

2.233. Кристаллическая решетка алюминия — кубическая гранецентрированная. Атомы алюминия расположены в вершинах куба и в центрах граней (рис. 2.45). Сколько атомов алюминия приходится на одну элементарную ячейку? Определить постоянную решетки (ребро куба) a и минимальное расстояние между атомами алюминия. Атомная масса алюминия $A = 27,0$, его плотность $\rho = 2,7$ г/см³.

2.234. С какой скоростью растет толщина покрытия стенки серебром при напылении, если атомы серебра, обладая энергией $E = 10^{-17}$ Дж, производят давление на стенку $P = 0,1$ Па? Атомная масса серебра $A = 108$, его плотность $\rho = 10,5$ г/см³.

*) Во всех задачах этого раздела считать известными постоянную Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹, универсальную (молярную) газовую постоянную $R = 8,31$ Дж/(моль·К) и постоянную Больцмана $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

2.235. Сколько молекул ртути содержится в объеме $V = 1 \text{ см}^3$ воздуха в помещении, зараженном ртутью, при температуре $t = 30^\circ \text{C}$, если давление насыщенного пара ртути при этой температуре $P = 0,75 \text{ Па}$?

2.236. Найти среднее расстояние между молекулами насыщенного водяного пара при температуре $t = 100^\circ \text{C}$.

2.237. В комнате объема $V = 60 \text{ м}^3$ испарили капельку духов, содержащую $m = 10^{-4} \text{ г}$ ароматического вещества. Сколько молекул ароматического вещества попадает в легкие человека при каждом вдохе? Объем вдыхаемого воздуха $V_{\text{в}} = 1 \text{ дм}^3$. Молярная масса ароматического вещества $\mu = 1 \text{ кг/моль}$.

2.238. При взрыве атомной бомбы ($M = 1 \text{ кг}$ плутония ^{242}Pu) получается одна радиоактивная частица на каждый атом плутония. Предполагая, что ветры равномерно перемешивают эти частицы во всей атмосфере, подсчитать число радиоактивных частиц, попадающих в объем $V = 1 \text{ дм}^3$ воздуха у поверхности Земли. Радиус Земли принять равным $R = 6 \cdot 10^6 \text{ м}$.

2.239. Сколько электронов содержится в объеме $V = 1 \text{ дм}^3$ кислорода при давлении $P = 10^6 \text{ Па}$ и температуре $t = 200^\circ \text{C}$?

2.240. В откачанном сосуде объема $V = 1 \text{ дм}^3$ находится $m = 1 \text{ г}$ гидрида урана (UH_3). При нагреве до температуры $t = 400^\circ \text{C}$ гидрид урана полностью разлагается на уран и водород. Найти давление водорода в сосуде при этой температуре. Атомная масса урана $A = 238$.

2.241. В сосуде объема $V = 1 \text{ дм}^3$ находится $m = 1 \text{ г}$ трития (изотопа водорода с атомной массой $A = 3$) при температуре $t = 27^\circ \text{C}$. За 12 лет половина ядер трития превращается в ядра гелия. Найти давление в сосуде в конце этого срока.

2.242. Известно, что $M = 1 \text{ г}$ радия за время $t = 1 \text{ с}$ дает $N_{\text{т}} = 3,7 \cdot 10^{10}$ ядер гелия. Каково будет давление гелия, образующегося в герметичной ампуле объема $V = 1 \text{ см}^3$, в которой в течение года находилось $m = 100 \text{ мг}$ радия? Температура ампулы $t = 15^\circ \text{C}$.

2.243. При бомбардировке лития (^7Li) протонами он превращается в гелий (^4He). Определить объем гелия, образовавшегося из $m = 1 \text{ г}$ лития, если гелий в конце опыта имеет температуру $t = 30^\circ \text{C}$ и давление $P = 9,3 \cdot 10^4 \text{ Па}$.

2.244. В некоторый момент времени счетчик радиоактивного излучения, расположенный вблизи препарата ^{18}F (с малым периодом полураспада), зафиксировал 100 отсчетов в секунду. Через время $\tau = 22 \text{ мин}$ показание уменьшилось до 87 отсчетов в секунду. Определить период полураспада ^{18}F .

2.245. Ампула с радиоактивным препаратом ^{24}Na (период полураспада $\tau_{1/2} = 15 \text{ ч}$) охлаждается потоком воздуха. В начале опыта воздух нагревался на 2°C . Через какое время охлаждающий ампулу воздух будет нагреваться на $1,8^\circ \text{C}$?

2.246. В микрокалориметр с теплоемкостью $C = 100 \text{ Дж/К}$ помещен $m_0 = 1 \text{ мг}$ изотопа кремния (атомная масса $A = 31$). При распаде ядра ^{31}Si выделяется энергия $Q = 4,4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Период полураспада изотопа кремния $\tau_{1/2} = 2 \text{ ч } 36 \text{ мин}$. На сколько повы-

сится температура калориметра через время $\tau = 52$ мин после начала опыта?

2.247. В микрокалориметр с теплоемкостью $C = 1000$ Дж/К помещены $m = 10$ мг изотопа кобальта (атомная масса $A = 61$). При распаде ядра ^{61}Co выделяется энергия $Q = 2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Через время $\tau = 50$ мин температура калориметра повысилась на величину $\Delta T = 0,06$ К. Оценить период полураспада изотопа кобальта.

2.248. Спутник сечения $S = 1 \text{ м}^2$ движется с первой космической скоростью $v = 7,9$ км/с по околоземной орбите. Давление воздуха на высоте орбиты ($h = 200$ км) $P = 1,37 \cdot 10^{-4}$ Па, температура $T = 1226$ К. Определить число столкновений спутника с молекулами воздуха в единицу времени.

2.249. Оценить длину свободного пробега молекулы в воздухе при нормальных условиях. Диаметр молекулы $d = 3,7 \cdot 10^{-10}$ м.

2.250. Колба термоса объема $V = 1 \text{ дм}^3$ откачана до давления $P = 1$ Па (при комнатной температуре). Оценить время, в течение которого чай в таком термосе остынет от 90 до 70 °С. Площадь поверхности колбы $S = 600 \text{ см}^2$. Утечку тепла через пробку не учитывать.

2.251. Теплоизолированная полость очень маленькими одинаковыми отверстиями соединена с двумя сосудами, содержащими газообразный гелий (рис. 2.46). Давления гелия в этих сосудах поддерживаются равными P , а температуры равны T в одном сосуде и $2T$ в другом. Найти установившиеся давление и температуру внутри полости.

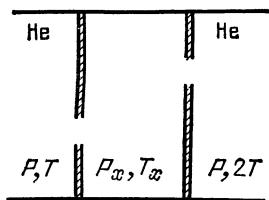


Рис. 2.46.

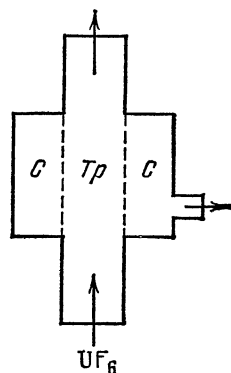


Рис. 2.47.

2.252. Природный уран состоит из смеси двух изотопов с атомными массами 235 и 238 и отношением концентраций $\alpha_0 = 0,007$. Для увеличения концентрации ^{235}U , который применяется в атомных реакторах, используется истечение газообразного гексафторида урана (UF_6) в вакуум через маленькие отверстия. Газ пропускается через трубу Tr с пористыми стенками (рис. 2.47). Прошедший через стенки трубы газ откачивается из сосуда C . Оценить увеличение концентрации ^{235}U в откачанном сосуде C . Для технических целей требуется обогащение урана до высоких концентраций ^{235}U . С этой целью гексафторид урана из сосуда C направляют в следующий каскад обогащения, устроенный аналогичным образом. Оценить

число таких каскадов, необходимое для получения $\alpha_1 = 0,05$, $\alpha_2 = 99$.

2.253. В настоящее время представляется возможным (например, с помощью специальным образом сфокусированного лазерного излучения) достижение давлений, при которых линейные размеры твердого тела можно уменьшить в 10 раз. Это позволит осуществлять ядерные микровзрывы, что считается одним из перспективных путей получения контролируемой термоядерной реакции. Во сколько раз у такого «сверхплотного» вещества критический объем и критическая масса меньше, чем у обычного? В критическом состоянии, когда начинается цепная реакция, число вторичных нейтронов, рождающихся в веществе, равно числу нейтронов, покидающих его через поверхность (вторичными называют нейтроны, возникающие при взаимодействии с делящимся веществом уже имеющихся в нем нейтронов).

III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Электростатика

3.1. Какой заряд Q приобрел бы медный шар радиуса $R = 10$ см, если бы удалось удалить из него все электроны проводимости? Атомная масса меди $A = 64$, плотность $\rho = 8,9$ г/см³. Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл *), постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ моль⁻¹. Считать, что на каждый атом меди приходится один электрон проводимости.

3.2. С какой силой F будут притягиваться два одинаковых свинцовых шарика радиуса $r = 1$ см, расположенные на расстоянии $R = 1$ м друг от друга, если у каждого атома первого шарика отнять по одному электрону и все эти электроны перенести на второй шарик? Атомная масса свинца $A = 207$, плотность $\rho = 11,3$ г/см³.

3.3. N одинаковых шарообразных капелек ртути заряжены до одного и того же потенциала V . Каков будет потенциал V' большой капли, получившейся в результате слияния этих капелек?

3.4. Металлический шар заряжают от электрофорной машины при помощи пластинки, которую после каждого соприкосновения с шаром снова заряжают от машины до заряда Q . Определить максимальный заряд шара, если его заряд после первого соприкосновения равен q .

3.5. Два небольших проводящих заряженных шара радиуса r расположены на расстоянии R друг от друга. Шары поочередно на некоторое время заземляют. Определить потенциал шара, кото-

*) Здесь и в последующих задачах под зарядом электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл понимается его абсолютная величина, равная заряду протона. В тех случаях, когда знак заряда электрона играет существенную роль, в формулы следует подставлять величину $-e$. Например, энергия электрона в поле с потенциалом V есть $-eV$; сила, действующая на электрон в поле напряженности E , есть $-eE$; и т. д.

рый был заземлен первым, если первоначально каждый шар имел заряд q .

3.6. Два небольших проводящих заряженных шара радиуса r расположены на расстоянии R друг от друга. Шары поочередно на некоторое время заземляют. Определить заряд, оставшийся на шаре, который был заземлен вторым, если первоначально каждый шар имел потенциал V .

3.7. Металлический шар радиуса R_1 , имеющий потенциал V_1 , окружают сферической проводящей оболочкой радиуса R_2 . Чему будет равен потенциал шара, если заземлить оболочку?

3.8. Металлический шар радиуса R_1 , имеющий потенциал V_1 , окружают незаряженной сферической проводящей оболочкой радиуса R_2 . Как изменится потенциал шара после того, как он будет на некоторое время соединен с оболочкой?

3.9. Плоский конденсатор с размерами пластин $25 \times 25 \text{ см}^2$ и расстоянием между ними $d_1 = 0,5 \text{ мм}$ заряжен до разности потенциалов $V_1 = 10 \text{ В}$ и отключен от источника. Какова будет разность потенциалов V_2 , если пластины раздвинуть до расстояния $d_2 = 5 \text{ мм}$?

3.10. Найти заряд на каждом из конденсаторов с емкостями C_1 , C_2 и C_3 , схема соединения которых дана на рис. 3.1. Э. д. с. батареи равна \mathcal{E} .

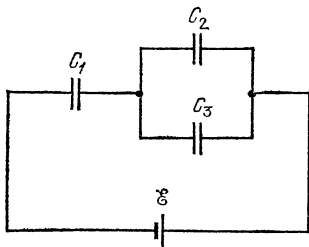


Рис. 3.1.

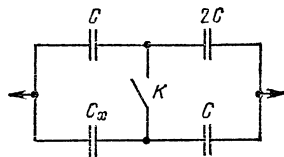


Рис. 3.2.

3.11. В схеме, изображенной на рис. 3.2, емкость батарей конденсаторов не изменяется при замыкании ключа K . Определить емкость конденсатора C_x .

3.12. Найти разность потенциалов между точками a и b в схеме, изображенной на рис. 3.3.

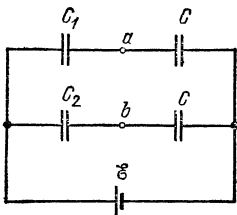


Рис. 3.3.

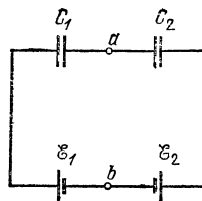


Рис. 3.4.

3.13. Найти разность потенциалов между точками a и b в схеме, изображенной на рис. 3.4.

3.14. Два плоских конденсатора одинаковой емкости C_0 заряжают до разности потенциалов V_0 и соединяют. В одном из конденсаторов расстояние между пластинами увеличивают в три раза. Найти заряды конденсаторов и разность потенциалов на них.

3.15. Два плоских конденсатора с емкостями C_1 и C_2 , обладающих зарядами q_1 и q_2 , включают в замкнутую цепь так, что положительно заряженная пластина одного конденсатора соединяется с отрицательно заряженной пластиной другого. Определить заряд каждого конденсатора в этом случае.

3.16. Конденсатор емкости C_1 заряжают от батареи с э. д. с. \mathcal{E} и подключают к незаряженному конденсатору емкости C_2 (рис. 3.5, а). Затем конденсатор C_2 отсоединяют от конденсатора C_1 и вновь подсоединяют, но при этом соединяют разноименно заряженные пластины конденсаторов C_1 и C_2 (рис. 3.5, б). Определить разность потенциалов на конденсаторах.

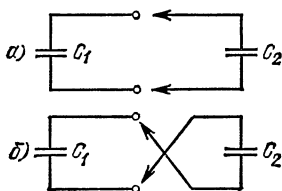


Рис. 3.5.

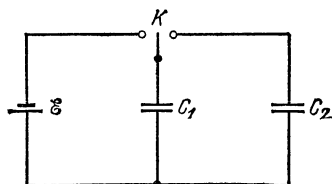


Рис. 3.6.

3.17. Конденсатор емкости C_1 при помощи переключателя K присоединяют сначала к батарее с э. д. с. \mathcal{E} , а потом к незаряженному конденсатору емкости C_2 (рис. 3.6). Найти заряд q_2 , который появится на конденсаторе C_2 .

3.18. Конденсатор емкости $C_0 = 20$ мкФ заряжают до разности потенциалов $V_0 = 400$ В и подключают к конденсатору емкости $C = 1$ мкФ, в результате чего последний заряжается. Отключив этот конденсатор, заряжают таким же образом второй конденсатор той же емкости ($C = 1$ мкФ), третий и т. д. Затем конденсаторы соединяют последовательно. Какую максимальную разность потенциалов можно получить таким способом?

3.19. Какой заряд Q протечет через гальванометр после замыкания ключа K в схеме, изображенной на рис. 3.7? Э. д. с. батареи равна \mathcal{E} , емкость каждого конденсатора равна C .

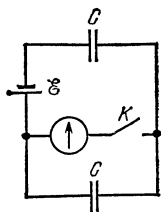


Рис. 3.7.

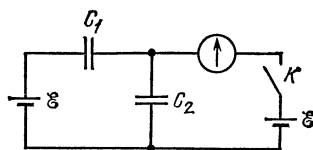


Рис. 3.8.

3.20. Какой заряд протечет через гальванометр после замыкания ключа K в схеме, изображенной на рис. 3.8?

3.21. Какой заряд протечет через гальванометр в схеме, изображенной на рис. 3.9, если замкнуть ключ K ?

3.22. На одной из пластин плоского конденсатора емкости C находится заряд $+q$, а на другой $+4q$. Определить разность потенциалов между пластинами конденсатора.

3.23. Два плоских воздушных конденсатора с одинаковыми пластинами заряжены одинаковыми зарядами. Расстояние между пластинами у одного из конденсаторов вдвое больше, чем у другого. Как изменится разность потенциалов между пластинами первого конденсатора, если второй конденсатор вставить в первый, как

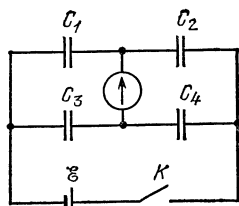


Рис. 3.9.

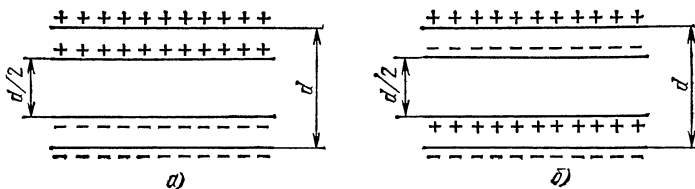


Рис. 3.10.

показано на рис. 3.10, а? Как она изменится в случае, если второй конденсатор вставить в первый, как показано на рис. 3.10, б?

3.24. В пространство между обкладками незаряженного плоского конденсатора вносят металлическую пластину, имеющую заряд Q , так, что между пластиной и обкладками конденсатора остаются зазоры l_1 и l_2 (рис. 3.11). Площади пластины и обкладок конденсатора одинаковы и равны S . Определить разность потенциалов между обкладками конденсатора.

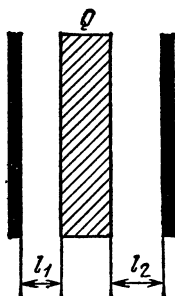


Рис. 3.11.

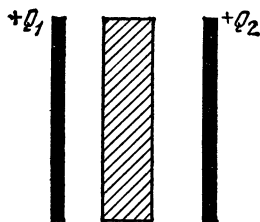


Рис. 3.12.

3.25. В плоском конденсаторе одна обкладка имеет заряд $+Q_1$, а другая $+Q_2$. Внутри конденсатора параллельно обкладкам помещают незаряженную металлическую пластину (рис. 3.12). Какой заряд будет индуцирован на левой и правой поверхностях пластины?

3.26. Четыре одинаковые металлические пластины расположены в воздухе на равных расстояниях d друг от друга (рис. 3.13). Площадь каждой из пластин равна S . Пластина 1 соединена проводником с пластиной 3, а от пластин 2 и 4 сделаны выводы. Определить емкость такого сложного конденсатора. Расстояние d между пластинами мало по сравнению с их размерами.



Рис. 3.13.



Рис. 3.14.

3.27. Четыре одинаковые металлические пластины расположены в воздухе на равных расстояниях d друг от друга (рис. 3.14). Площадь каждой из пластин равна S . Крайние пластины соединены между собой, средние подсоединены к батарее с э. д. с. \mathcal{E} . Найти заряды средних пластин. Расстояние d между пластинами мало по сравнению с их размерами.

3.28. Тонкая металлическая пластина 1 расположена вплотную к обкладке 2 конденсатора 2 — 3 емкости C так, что между пластиной 1 и обкладкой 2 существует электрический контакт (рис. 3.15). Затем пластину 1 с находящимся на ней зарядом помещают посередине между обкладками 2 и 3. Определить заряды обкладок 2 и 3. Э. д. с. батареи равна \mathcal{E} .

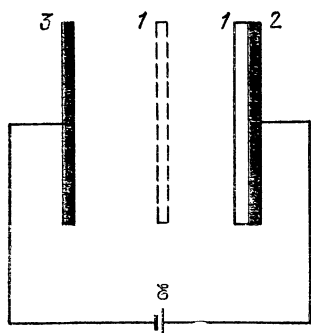


Рис. 3.15.

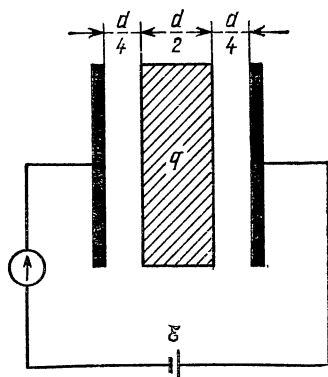


Рис. 3.16.

3.29. Плоский воздушный конденсатор подключен через гальванометр к источнику постоянной э. д. с. В конденсатор параллельно его обкладкам вставлена металлическая пластина, несущая заряд q (геометрические размеры показаны на рис. 3.16). При этом заряд конденсатора оказался равным $q/2$. Какой заряд протечет через

гальванометр, если произойдет короткое замыкание между металлической пластиной и правой обкладкой конденсатора?

3.30. В плоском воздушном конденсаторе к одной из обкладок вплотную придвинута пластина слюды ($\epsilon = 7$) толщины $d_1 = 0,3$ мм. Определить емкость конденсатора C . Площадь обкладок конденсатора $S = 2000$ см², расстояние между ними $d = 0,5$ мм.

3.31. Плоский воздушный конденсатор, пластины которого расположены горизонтально, наполовину залит жидким диэлектриком с проницаемостью ϵ . Какую часть конденсатора надо залить этим же диэлектриком при вертикальном расположении пластин, чтобы емкости в обоих случаях были одинаковы?

3.32. Воздушный конденсатор емкости C_0 заполняют диэлектриком с проницаемостью ϵ . Конденсатор какой емкости надо включить последовательно с данным, чтобы такая батарея вновь имела емкость C_0 ?

3.33. Плоский конденсатор с горизонтально расположенными пластинами подсоединен к батарее с э. д. с. \mathcal{E} и помещен в сосуд, который постепенно заполняется керосином ($\epsilon = 2$). Записать в виде формул и представить графически зависимости напряженности поля и потенциала в центре конденсатора от толщины слоя керосина h внутри него. Расстояние между пластинами конденсатора равно d .

3.34. При подключении сферического воздушного конденсатора к источнику высокого напряжения он пробивается при разности потенциалов $V_0 = 40$ кВ. Определить электрическую прочность воздуха в условиях опыта *). Радиусы внутренней и внешней обкладок конденсатора равны $r = 3$ см и $R = 9$ см.

3.35. Радиус внешней обкладки сферического воздушного конденсатора $R = 4$ см, а радиус внутренней обкладки r подбирается таким, чтобы конденсатор не пробивался при возможно большей разности потенциалов. Определить эту максимальную разность потенциалов V_0 . Электрическая прочность воздуха $E_0 = 3 \cdot 10^4$ В/см.

3.36. Внутренняя обкладка сферического воздушного конденсатора радиуса $r = 2$ см окружена сферическим слоем диэлектрика с проницаемостью $\epsilon = 2$. Внешний радиус диэлектрического слоя $R = 4$ см. Какой максимальный заряд можно сообщить такому конденсатору? Электрические прочности воздуха и диэлектрика одинаковы и равны $E_0 = 30$ кВ/см.

3.37. Вычислить объемную плотность ρ электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля на поверхности Земли $E_0 = 100$ В/м, а на высоте $h = 1$ км она уменьшается в два раза. Считать, что электрические заряды в атмосфере до высоты h распределены равномерно.

3.38. У расположенного горизонтально незаряженного плоского воздушного конденсатора нижняя пластина закреплена, а верхняя подвешена к коромыслу весов (рис. 3.17). Весы находятся в равновесии, когда расстояние между пластинами $d = 1$ мм. Как нужно

*) Электрической прочностью называют напряженность E_0 электрического поля, при которой происходит пробой в диэлектрике.

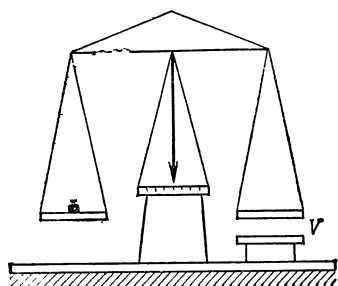


Рис. 3.17.

изменить нагрузку второй чашки весов, чтобы сохранить равновесие при том же расстоянии между пластинами, если конденсатор зарядить до разности потенциалов $V = 1000$ В? Площадь пластин конденсатора $S = 50$ см².

3.39. Одна пластина плоского воздушного конденсатора закреплена неподвижно, вторая подвешена на пружине жесткости k . Площадь пластин равна S . На сколько удлинится пружина, если конденсатору сообщить заряд Q ?

3.40. В пространство между обкладками плоского воздушного конденсатора, где поддерживается постоянная разность потенциалов, вводят диэлектрическую пластину с проницаемостью $\epsilon = 3$. Как изменится сила электростатического взаимодействия между обкладками конденсатора? Толщина пластины составляет половину расстояния между обкладками конденсатора.

3.41. Плоский воздушный конденсатор заполнили керосином ($\epsilon = 2$) и зарядили, сообщив ему энергию U_1 . Затем конденсатор отсоединили от источника, слили керосин и разрядили. Какая энергия выделилась при разряде?

3.42. Разности потенциалов на конденсаторах с емкостями C_1 и C_2 равны V_1 и V_2 . Конденсаторы соединяют между собой. Найти энергию, которая выделится при перезарядке конденсаторов в двух случаях: а) соединены одноименно заряженные пластины; б) соединены разноименно заряженные пластины.

Закон Ома. Законы электролиза *)

3.43. Две электрические цепи состоят из резисторов с известными сопротивлениями R и $2R$ и неизвестным сопротивлением r (рис. 3.18). При каком r сопротивления обеих цепей, измеренные между точками A и B , окажутся одинаковыми и каково при этом полное сопротивление R_{AB} ?

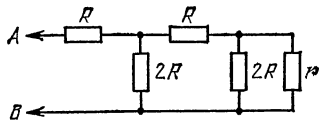
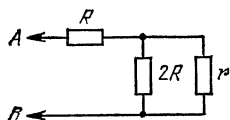


Рис. 3.18.

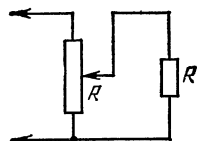


Рис. 3.19.

3.44. Для регулирования напряжения на нагрузке собрана схема, приведенная на рис. 3.19. Сопротивление нагрузки и полное

*) Во всех задачах этого раздела сопротивлением соединяющих проводов, если оно не дано в условии, следует пренебречь.

сопротивление регулирующего потенциометра одинаковы и равны R . Резистор подключен к половине потенциометра. К какой части сопротивления потенциометра следует подключить резистор, чтобы напряжение на нем возросло в два раза?

3.45. Чтобы определить место повреждения изоляции двухпроводной телефонной линии длины $L = 4$ км, к одному ее концу присоединили батарею с э. д. с. $\mathcal{E} = 15$ В. При этом оказалось, что если провода у другого конца линии разомкнуты, то ток через батарею $I_1 = 1$ А; если провода замкнуты накоротко, то ток через батарею $I_2 = 1,8$ А. Найти место повреждения и сопротивление изоляции в месте повреждения. Сопротивление единицы длины провода $\rho = 1,25$ Ом/км. Сопротивлением батареи пренебречь.

3.46. К одному концу двухпроводной линии передачи электроэнергии подсоединен источник постоянной э. д. с., а к другому — потребитель с сопротивлением R_0 . В линии произошло повреждение изоляции, в результате чего ток через источник возрос в два раза, а ток через сопротивление R_0 упал в восемь раз. Найти сопротивление изоляции в месте повреждения, если длина каждого провода линии равна L , а сопротивление единицы длины провода равно ρ .

3.47. В цепь гальванометра включена термопара, состоящая из медной и константовой проволочек диаметра $2a = 0,2$ мм и длины $l = 1$ м каждая. Чувствительность гальванометра $i_0 = 10^{-6}$ А на деление шкалы; его внутреннее сопротивление $r = 50$ Ом. На сколько делений отклонится стрелка гальванометра, если температуру спая термопары увеличить на 50°C по отношению к температуре окружающей среды? Э. д. с. термопары на единицу температуры $\mathcal{E}_0 = 40$ мкВ/К, удельные сопротивления константана и меди $\rho_1 = 0,5 \cdot 10^{-6}$ Ом·м и $\rho_2 = 0,17 \cdot 10^{-7}$ Ом·м.

3.48. В схему включены два микроамперметра и два одинаковых вольтметра (рис. 3.20). Показания микроамперметров $I_1 = 100$ мкА и $I_2 = 99$ мкА; показание вольтметра $V_1 = 10$ В. Найти показание вольтметра V_2 .

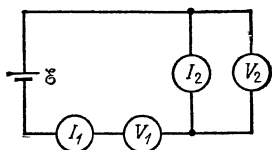


Рис. 3.20.

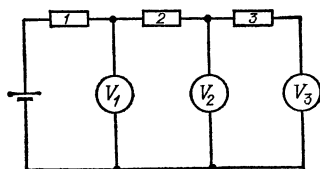


Рис. 3.21.

3.49. Цепь собрана из одинаковых резисторов и одинаковых вольтметров (рис. 3.21). Показания первого и третьего вольтметра $V_1 = 10$ В и $V_3 = 8$ В. Найти показание второго вольтметра V_2 .

3.50. Гальванометр с чувствительностью $3 \cdot 10^{-5}$ А на деление шкалы и внутренним сопротивлением $r_1 = 20$ Ом, включенный в цепь термопары, дал отклонение в 11 делений шкалы. Другой гальванометр с чувствительностью $5 \cdot 10^{-5}$ А на деление шкалы и внутренним сопротивлением $r_2 = 30$ Ом, включенный вместо первого, дал

отклонение в 5 делений шкалы. Определить сопротивление терморезистора R и ее э. д. с. \mathcal{E} .

3.51. К гальванометру с сопротивлением $r = 290$ Ом присоединили шунт, понижающий чувствительность гальванометра в 10 раз. Какой резистор надо включить последовательно с шунтированным гальванометром, чтобы общее сопротивление осталось неизменным?

3.52. Имеется прибор с ценой деления $i_0 = 10$ мкА. Шкала прибора имеет $n = 100$ делений; внутреннее сопротивление прибора $r = 50$ Ом. Как из этого прибора сделать вольтметр с пределом

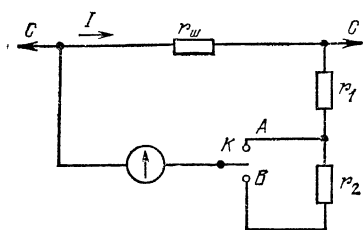


Рис. 3.22.

измерения напряжения $V_0 = 200$ В или миллиамперметр с пределом измерения тока $I_0 = 800$ мА?

3.53. Для измерения больших токов в цепи CC используется шунт с сопротивлением $r_{ш}$, параллельно которому через сопротивления $r_1 = 2$ Ом и $r_2 = 90$ Ом подключается гальванометр (рис. 3.22). В положении A переключателя K вся шкала прибора соот-

ветствует току в цепи CC $I_1 = 10$ А, в положении B — току $I_2 = 100$ А. Найти внутреннее сопротивление гальванометра.

3.54. Присоединение к вольтметру некоторого добавочного сопротивления увеличивает предел измерения напряжения в n раз. Другое добавочное сопротивление увеличивает предел измерения в m раз. Во сколько раз увеличится предельно измеримое вольтметром напряжение, если включить последовательно с вольтметром эти два сопротивления, соединенные между собой параллельно?

3.55. При включении шунта, имеющего сопротивление $r'_{ш} = 100$ Ом, параллельно измерительному прибору стрелка отклоняется на всю шкалу при токе во внешней цепи $I' = 3$ А. При включении добавочного сопротивления $R_0 = 300$ Ом к незашунтированному гальванометру шкала прибора становится в четыре раза грубее, чем без добавочного сопротивления и шунта. Какое сопротивление шунта надо взять для того, чтобы стрелка прибора отклонялась на всю шкалу при токе во внешней цепи $I = 7,5$ А?

3.56. Найти ток через перемычку ab в схеме, представленной на рис. 3.23. Сопротивлениями перемычки, подводящих проводов и внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

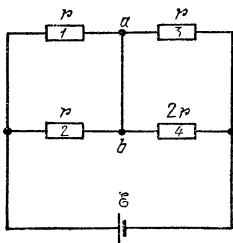


Рис. 3.23.

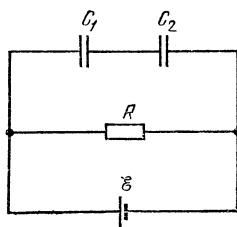


Рис. 3.24.

3.57. Найти напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 в схеме, представленной на рис. 3.24, если известно, что при замыкании резистора с сопротивлением R накоротко ток через батарею возрастает в три раза. Э. д. с. батареи равен \mathcal{E} .

3.58. Определить заряд конденсатора C в схеме, представленной на рис. 3.25. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

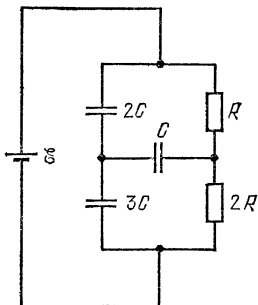


Рис. 3.25.

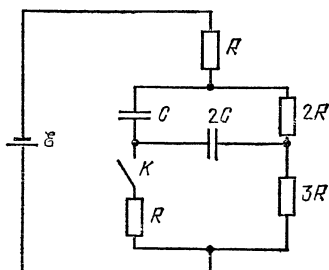


Рис. 3.26.

3.59. Определить заряд, протекающий через ключ K при его замыкании, в схеме, представленной на рис. 3.26. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

3.60. Два аккумулятора с э. д. с. $\mathcal{E}_1 = 57$ В и $\mathcal{E}_2 = 32$ В соединены, как показано на рис. 3.27. Какова разность потенциалов между точками a и b , если отношение внутренних сопротивлений аккумуляторов $r_2/r_1 = 1,5$?

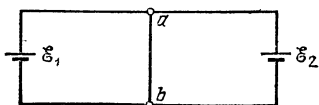


Рис. 3.27.

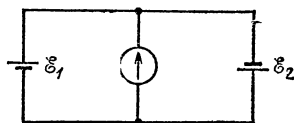


Рис. 3.28.

3.61. Две батареи с э. д. с. \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 включены, как показано на рис. 3.28. При каком соотношении между внутренними сопротивлениями батарей ток через гальванометр не пойдет?

3.62. В цепи, показанной на рис. 3.29, $R_2 > R_1$. При каком сопротивлении R_3 можно подобрать такое сопротивление R_4 , чтобы ток через гальванометр был равен нулю? Э. д. с. батарей одинаковы. Внутренним сопротивлением батарей пренебречь.

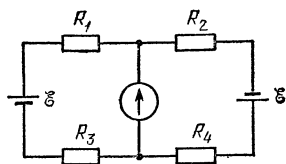


Рис. 3.29.

3.63. Две батареи с одинаковыми э. д. с. \mathcal{E} соединены так, что э. д. с. образовавшегося источника равен $\mathcal{E}/2$. Внутреннее сопротивление одной из батарей равно r . Изобразить схему включения и определить возможные значения внутреннего сопротивления второй батареи.

3.64. Две батареи с одинаковыми внутренними сопротивлениями соединили так, что э. д. с. образовавшегося источника равна \mathcal{E} . Э. д. с. одной из батарей равна $3\mathcal{E}/2$. Изобразить все возможные схемы включения и для каждой схемы определить э. д. с. второй батареи.

3.65. Через аккумулятор в конце зарядки течет ток $I_1 = 4$ А. При этом напряжение на его клеммах $V_1 = 12,8$ В. При разрядке того же аккумулятора током $I_2 = 6$ А напряжение на его клеммах $V_2 = 11,1$ В. Найти ток короткого замыкания.

3.66. Генератор с э. д. с. $\mathcal{E}_1 = 12$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0,2$ Ом заряжает батарею аккумуляторов с э. д. с. $\mathcal{E}_2 = 10$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 0,6$ Ом. Параллельно батарее включена лампочка с сопротивлением $R = 3$ Ом. Определить токи в батарее и в лампочке.

3.67. Электрическая цепь, состоящая из резисторов с сопротивлениями R_1 , R_2 и R_3 , подключена к двум источникам с э. д. с. \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 (рис. 3.30). При каких условиях ток через резистор R_1 будет равен нулю?

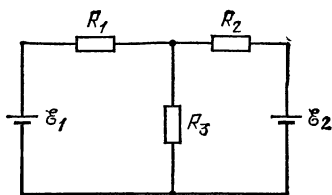


Рис. 3.30.

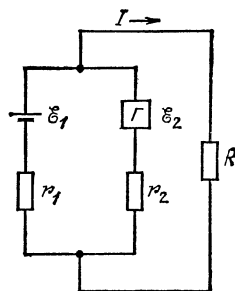


Рис. 3.31.

3.68. Источниками электрического тока в системах электрического оборудования автомобилей являются генератор постоянного тока и соединенный с ним параллельно аккумулятор (рис. 3.31). Э. д. с. генератора $\mathcal{E}_2 = 14$ В, его внутреннее сопротивление $r_2 = 0,05$ Ом. Э. д. с. аккумулятора $\mathcal{E}_1 = 12$ В. При каком токе I , потребляемом нагрузкой, аккумулятор начнет разряжаться?

3.69. В схеме, изображенной на рис. 3.32, положение движка потенциометра подобрано так, что ток $I_2 = 0$. Чему равен при этом ток I_1 ?

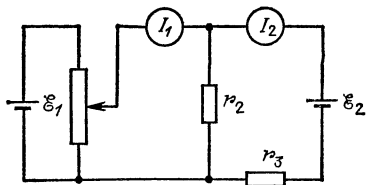


Рис. 3.32.

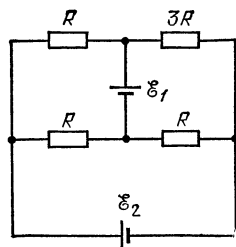


Рис. 3.33.

3.70. В схеме, изображенной на рис. 3.33, э. д. с. батареи \mathcal{E}_1 уменьшили на 1,5 В, после чего токи на различных участках цепи

изменились. Как нужно изменить э. д. с. батареи \mathcal{E}_2 , чтобы стал прежним: а) ток через батарею \mathcal{E}_1 ; б) ток через батарею \mathcal{E}_2 ?

3.71. Определить разность потенциалов между точками a и b (рис. 3.34). Э. д. с. и внутренние сопротивления батарей указаны на рисунке.

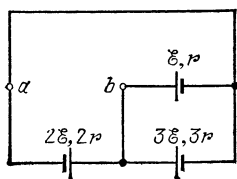


Рис. 3.34.

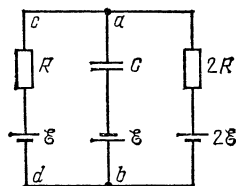


Рис. 3.35.

3.72. Определить разность потенциалов на конденсаторе C (рис. 3.35). Сопротивления резисторов, э. д. с. батарей указаны на рисунке. Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь. Какой знак будет иметь заряд на обкладке конденсатора, соединенной с резисторами?

3.73. Сопротивления всех резисторов в схеме одинаковы (рис. 3.36): $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Э. д. с. батарей равны $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_3 = 4\mathcal{E}$. Найти модули и направления токов, протекающих по каждому резистору, а также токов, протекающих через батареи. Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

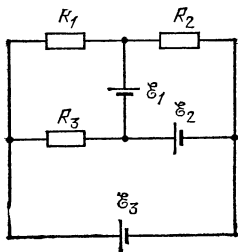


Рис. 3.36.

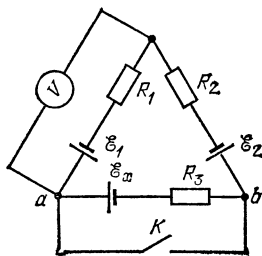


Рис. 3.37.

3.74. Электрическая цепь состоит из батарей с э. д. с. \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 и \mathcal{E}_3 и резисторов с сопротивлениями R_1 , R_2 и R_3 (рис. 3.37). К участку цепи подключен вольтметр V с большим внутренним сопротивлением. Найти э. д. с. \mathcal{E}_3 , при которой показания вольтметра не изменятся, если будет замкнут ключ K . Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

3.75. Плоский конденсатор с расстоянием между пластинами d , заполненный средой с диэлектрической проницаемостью ϵ и удельным сопротивлением ρ , включен в цепь батареи с э. д. с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r . Чему равна напряженность E электрического поля в конденсаторе, если его емкость равна C ?

3.76. Сферический конденсатор емкости $C_0 = 10^{-10}$ Ф заполняется слабопроводящей жидкостью с удельным сопротивлением $\rho = 10^4$ Ом·м. Найти сопротивление утечки конденсатора.

3.77. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено жидкостью с диэлектрической проницаемостью ϵ и удельным сопротивлением ρ . Найти силу взаимодействия между пластинами конденсатора, когда через конденсатор течет ток I . Площадь пластин конденсатора равна S .

3.78. Два плоских воздушных конденсатора с емкостями C_1 и C_2 соединены последовательно и подключены к батарее с э. д. с. \mathcal{E} . Какие разности потенциалов будут на конденсаторах, если их заполнить веществами с удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 и диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 ?

3.79. По медному проводу сечения $S = 1$ мм² течет ток $I = 10$ мА. Найти среднюю скорость v упорядоченного движения электронов вдоль проводника. Считать, что на каждый атом меди приходится один электрон проводимости. Атомная масса меди $A = 63,6$, плотность $\rho = 8,9$ г/см³.

3.80. Воздух в пространстве между пластинами плоского конденсатора с размерами $10 \times 10 \times 2,5$ см³ ионизуется рентгеновскими лучами так, что в 1 см³ за 1 с образуется 10^9 ионов и столько же свободных электронов. Пластины конденсатора соединены с источником напряжения $V = 1300$ В через резистор с сопротивлением $R_1 = 10^{10}$ Ом. Резистор с таким же сопротивлением $R_2 = 10^{10}$ Ом включен параллельно конденсатору (рис. 3.38). Какой ток протекает через резистор R_1 ? Считать, что ионы и электроны достигают пластин конденсатора, не успев рекомбинировать,

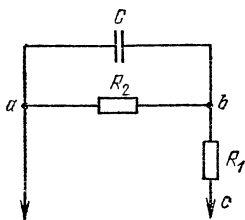


Рис. 3.38.

и что заряд каждого иона равен по модулю заряду одного электрона.

3.81. Какая масса алюминия отложится на катоде за время $t = 10$ ч при электролизе $Al_2(SO_4)_3$, если ток через электролит $I = 1$ А? Постоянная Фарадея $F = 96\,500$ Кл/моль, атомная масса алюминия $A = 27$.

3.82. Какой заряд Q проходит через электролитическую ванну за время $t = 10$ с, если ток за это время равномерно возрастает от нуля до $I = 3$ А? Какая масса меди выделяется при этом на катоде ванны, если электролитом является медный купорос? Постоянная Фарадея $F = 96\,500$ Кл/моль, атомная масса меди $A = 63,6$.

3.83. Какая масса меди выделилась из раствора $CuSO_4$ за время $t = 100$ с, если ток, протекавший через электролит, менялся по закону $I = (5 - 0,02t)$ А, где t — время в секундах? Постоянная Фарадея $F = 96\,500$ Кл/моль, атомная масса меди $A = 63,6$.

3.84. Никелирование металлического изделия с поверхностью $S = 120$ см² продолжалось время $t = 5$ ч при токе $I = 0,3$ А.

Валентность никеля $z = 2$, атомная масса $A = 58,7$, плотность $\rho = 9 \text{ г/см}^3$. Определить толщину слоя никеля.

3.85. Какой заряд нужно пропустить через электролитическую ванну с подкисленной водой, чтобы получить $V = 1 \text{ дм}^3$ гремучего газа при температуре $t = 27^\circ \text{C}$ и давлении $P = 10^5 \text{ Па}$?

3.86. В течение какого времени нужно производить электролиз подкисленной воды, чтобы полученным водородом можно было наполнить при нормальных условиях воздушный шар с подъемной силой 2000 Н ? Ток при электролизе $I = 100 \text{ А}$.

Работа и мощность электрического тока.

Закон Джоуля—Ленца

3.87. Какое количество тепла выделится в цепи при переключении ключа K из положения 1 в положение 2 (рис. 3.39)?

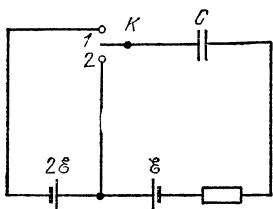


Рис. 3.39.

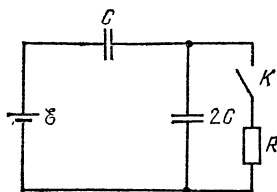


Рис. 3.40.

3.88. Какое количество тепла выделится на резисторе с сопротивлением R после замыкания ключа K (рис. 3.40)? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

3.89. Конденсатор емкости C , заряженный до напряжения \mathcal{E} , подключается через резистор с большим сопротивлением к батарее с э. д. с. $5\mathcal{E}$ (рис. 3.41). Определить количество тепла, которое выделяется в цепи при зарядке конденсатора до напряжения $5\mathcal{E}$.

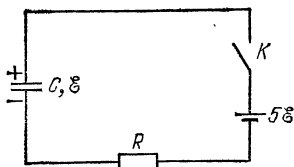


Рис. 3.41.

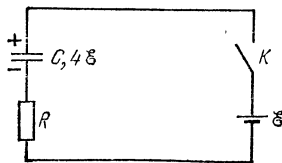


Рис. 3.42.

3.90. Конденсатор емкости C , заряженный до напряжения $4\mathcal{E}$, разряжается через резистор с большим сопротивлением R и батарею с э. д. с. \mathcal{E} (рис. 3.42). Найти количество тепла, выделившееся при разрядке конденсатора.

3.91. Какое количество тепла выделится в цепи при переключении ключа K из положения 1 в положение 2 (рис. 3.43)?

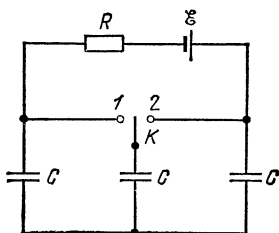


Рис. 3.43.

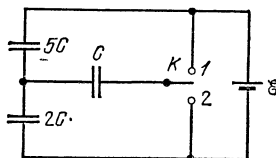


Рис. 3.44.

3.92. Какое количество тепла выделится в цепи, если ключ K переключить из положения 1 в положение 2 (рис. 3.44)?

3.93. Между обкладками плоского конденсатора расположена диэлектрическая пластина ($\epsilon = 3$), заполняющая весь объем конденсатора. Конденсатор через резистор подключен к батарее с э. д. с. $\mathcal{E} = 100$ В (рис. 3.45). Пластину быстро удаляют так, что заряд на конденсаторе не успевает измениться. Какая энергия выделится после этого в цепи в виде тепла? Емкость незаполненного конденсатора $C_0 = 100$ мкФ.

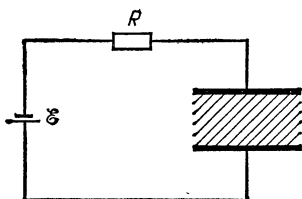


Рис. 3.45.

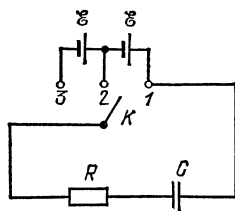


Рис. 3.46.

3.94. Зарядку конденсатора емкости C до напряжения $2\mathcal{E}$ производят двумя способами (рис. 3.46): либо ключ K сразу ставят в положение 3, либо его сначала ставят в положение 2 и затем, после зарядки конденсатора до напряжения \mathcal{E} , переводят в положение 3. Найти отношение к. п. д. батареи при различных способах зарядки.

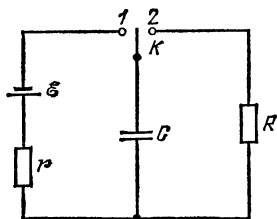


Рис. 3.47.

3.95. Конденсатор емкости $C = 0,04$ мкФ с помощью ключа K (рис. 3.47) периодически с частотой $n = 50$ раз в секунду заряжается от источника с э. д. с. $\mathcal{E} = 100$ В и внутренним сопротивлением r и разряжается через нагрузку с сопротивлением R . Определить мощность, выделяемую в нагрузке, и к. п. д. такого устройства. Считать, что время замыкания контактов

ключа достаточно, чтобы конденсатор успел полностью зарядиться в положении 1 и полностью разрядиться в положении 2.

3.96. К концам свинцовой проволоки длины 1 м приложена разность потенциалов $V = 10$ В. Какое время τ пройдет с начала пропускания тока до момента, когда свинец начнет плавиться? Начальная температура $t_0 = 20^\circ\text{C}$, температура плавления свинца $t = 327^\circ\text{C}$, его удельное сопротивление $\rho = 1,7 \cdot 10^{-6}$ Ом·м, удельная теплоемкость $c = 0,125$ Дж/(г·К), плотность $d = 11,3$ г/см³. Потерей тепла в окружающее пространство пренебречь.

3.97. Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r = 0,08$ Ом при токе $I_1 = 4$ А отдает во внешнюю цепь мощность $N_1 = 8$ Вт. Какую мощность N_2 отдаст он во внешнюю цепь при токе $I_2 = 6$ А?

3.98. Мощность, рассеиваемая на резисторе с сопротивлением R_1 , подсоединенном к батарее, равна N . Чему равна э. д. с. батареи, если эта мощность не изменилась при замене R_1 на R_2 ?

3.99. Параллельно резистору с известным сопротивлением R , подключенному к батарее, включили резистор с неизвестным сопротивлением. Оказалось, что мощность, выделяемая на внешнем участке цепи, не изменилась. Определить неизвестное сопротивление резистора R_x . Внутреннее сопротивление батареи равно r .

3.100. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них чайник вскипает через 10 мин, при включении другой — через 15 мин. Через какое время чайник вскипит, если эти обмотки включить вместе: а) параллельно, б) последовательно?

3.101. Нагреватель кипятильника состоит из четырех секций, каждая из которых имеет сопротивление $R = 1$ Ом. Нагреватель питают от аккумуляторной батареи с э. д. с. $\mathcal{E} = 8$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Как нужно включить элементы нагревателя, чтобы вода в кипятильнике нагревалась быстрее? Какова при этом мощность, расходуемая аккумулятором?

3.102. Электрическая цепь состоит из резисторов, соединенных таким образом, что между каждыми двумя из n точек цепи включен резистор с сопротивлением r . Какая мощность будет выделяться в этой цепи, если к каким-либо двум точкам подсоединить батарею с э. д. с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r ?

3.103. Какой ток пойдет по подводящим проводам при коротком замыкании, если на двух плитках с сопротивлениями $R_1 = 200$ Ом и $R_2 = 500$ Ом выделяется при поочередном включении одинаковая мощность $N = 200$ Вт?

3.104. Электроэнергия генератора мощности N_0 передается потребителю по проводам, имеющим сопротивление r . Э. д. с. генератора равна \mathcal{E} . Определить к. п. д. линии передачи, т. е. отношение мощности, выделяемой на полезной нагрузке, к мощности генератора. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

3.105. Электроэнергия генератора передается потребителю по проводам, имеющим сопротивление r . К. п. д. линии передачи, т. е. отношение мощности, выделяемой на полезной нагрузке, к мощности генератора, равен η . Определить сопротивление нагрузки. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

3.106. Во сколько раз следует повысить напряжение источника, чтобы потери мощности (в линии передачи от источника к потребителю) снизить в 100 раз при условии постоянства отдаваемой генератором мощности?

3.107. При передаче электроэнергии на большое расстояние используется трансформатор, повышающий напряжение до 6 кВ, загруженный до номинальной мощности 1000 кВт. При этом разность показаний счетчиков электроэнергии, установленных на трансформаторной подстанции и в приемном пункте, увеличивается ежегодно на 216 кВт·ч. Во сколько раз необходимо повысить напряжение, чтобы потери электроэнергии не превышали 0,1 %?

3.108. Линия имеет сопротивление $r = 300$ Ом. Какое напряжение должен иметь генератор, чтобы при передаче по этой линии к потребителю мощности $N = 25$ кВт потери в линии не превышали 4 % передаваемой мощности?

3.109. Определить массу меди, нужной для устройства двухпроводной линии длины $l = 5$ км. Напряжение на шинах станции $V = 2400$ В. Передаваемая потребителю мощность $N = 60$ кВт. Допускаемая потеря напряжения в проводах равна 8 %. Плотность меди $d = 8,9$ г/см³, удельное сопротивление $\rho = 0,017 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

3.110. Цепь состоит из двух батарей с э. д. с. $\mathcal{E}_1 = 4$ В и $\mathcal{E}_2 = 12$ В, потенциометра со скользящим контактом, полное сопротивление которого $R = 1500$ Ом, резистора с сопротивлением $r = 200$ Ом и амперметра (рис. 3.48). С каким полюсом батареи \mathcal{E}_2 надо соединить скользящий контакт и какое положение он должен занимать на потенциометре, чтобы ток через амперметр был равен нулю? Какая мощность при этом будет рассеиваться

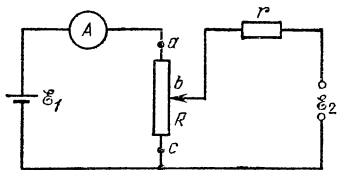


Рис. 3.48.

на сопротивлениях R и r ? Внутренним сопротивлением батарей пренебречь.

3.111. Батарея с э. д. с. $\mathcal{E} = 4$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом входит в состав неизвестной цепи (рис. 3.49). К полюсам батарей подключен вольтметр так, что положительная клемма вольтметра подсоединена к положительному полюсу батареи. Вольтметр показывает напряжение $V = 6$ В. Определить количество тепла, выделяющееся за единицу времени на внутреннем сопротивлении батарей.

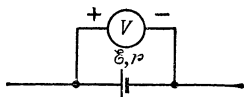


Рис. 3.49.

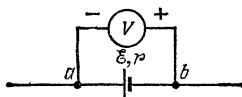


Рис. 3.50.

3.112. Батарея с э. д. с. $\mathcal{E} = 4$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом входит в состав неизвестной цепи (рис. 3.50). К полюсам

батарей подсоединен вольтметр. Оказалось, что для нормальной работы вольтметра его положительную клемму надо подключить к отрицательному полюсу батареи. Вольтметр при этом показывает напряжение $V = 2$ В. Какое количество тепла выделяется в единицу времени на внутреннем сопротивлении батареи?

3.113. Протекающий через резистор с сопротивлением $R = 100$ Ом ток изменяется во времени по закону $I = k\sqrt{t}$, где $k = 1$, если время измеряется в секундах, а ток в амперах. Какое время протекал ток, если на резисторе выделилось количество тепла $Q = 1,8$ кДж?

3.114. Напряжение на резисторе с сопротивлением $R = 100$ Ом меняется во времени по закону $V = k\sqrt{t}$, где $k = 2$, если время измеряется в секундах, напряжение — в вольтах. Найти количество тепла, выделяющееся на резисторе за первые 100 с.

3.115. При длительном пропускании тока $I_1 = 1,4$ А через проволоку последняя нагрелась до температуры $t_1 = 55^\circ\text{C}$, а при пропускании тока $I_2 = 2,8$ А — до температуры $t_2 = 160^\circ\text{C}$. До какой температуры t_x нагревается проволока при токе $I_3 = 5,5$ А? Теплоотдача с единицы поверхности пропорциональна разности температур проволоки и воздуха. Зависимостью сопротивления проволоки от температуры пренебречь.

3.116. Две константовые проволоки одинаковой длины, диаметр одной из которых вдвое больше диаметра другой, включены параллельно в электрическую цепь. Во сколько раз отличаются их тепловые удлинения при длительном протекании тока в цепи? Теплоотдача с единицы поверхности пропорциональна разности температур проволоки и воздуха. Зависимостью сопротивления проволоки от температуры пренебречь. Как изменится ответ, если проволоки включить последовательно?

Нелинейные элементы в цепях постоянного тока

3.117. Определить сопротивление электрической цепи (рис. 3.51) для двух направлений тока: ток течет от A к B (сопротивление R_{AB}),

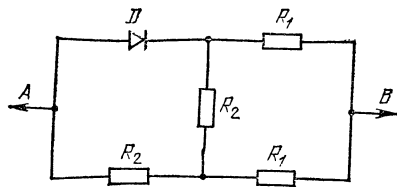


Рис. 3.51.

ток течет от B к A (сопротивление R_{BA}). Сопротивления резисторов $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 60$ Ом. В цепь включен идеальный диод D *).

*) Идеальным называется диод, у которого сопротивление в прямом направлении можно считать равным нулю, а в обратном — бесконечно большим.

3.118. Определить ток, текущий через идеальный диод D в цепи, изображенной на рис. 3.52.

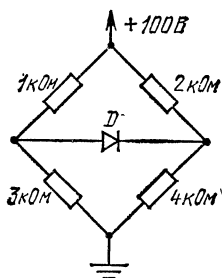


Рис. 3.52.

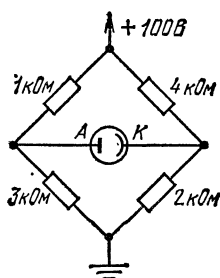


Рис. 3.53.

3.119. Электрическая цепь содержит фотоэлемент (рис. 3.53). Если потенциал анода фотоэлемента выше, чем потенциал катода, то ток фотоэлемента $I_0 = 10$ мА (ток насыщения). В обратном случае ток фотоэлемента равен нулю. Определить напряжение на фотоэлементе.

3.120. Схема (рис. 3.54) состоит из двух одинаковых резисторов с сопротивлениями R и двух одинаковых нелинейных элементов, вольтамперная характеристика которых имеет вид $V = \alpha I^2$, где α — некоторый известный постоянный коэффициент. При какой э. д. с. источника ток через гальванометр равен нулю? Сопротивлением источника пренебречь.

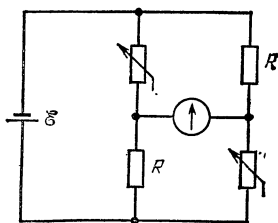


Рис. 3.54.

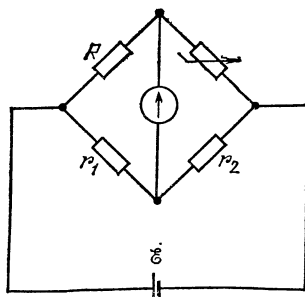


Рис. 3.55.

3.121. На рис. 3.55 изображена схема мостика Уитстона, в которой сопротивления резисторов $R = 5$ Ом, $r_1 = 2$ Ом, $r_2 = 4$ Ом, а вольтамперная характеристика нелинейного элемента имеет вид $I = \alpha V^2$. Определить коэффициент пропорциональности α , если известно, что мостик оказывается сбалансированным при э. д. с. батареи $\mathcal{E} = 12$ В.

3.122. Зажигание неоновой лампы осуществляется с помощью схемы, показанной на рис. 3.56. После замыкания ключа K конденсатор C начнет заряжаться. Когда напряжение на лампе, равное напряжению на конденсаторе, достигает некоторого значения, лампочка загорится, после чего напряжение на ней падает. Минималь-

ное напряжение на лампе, при котором она еще горит, $V = 80$ В; при этом ток через лампу $I = 1$ мА. При каких сопротивлениях резистора R лампа после зажигания будет стационарно гореть?
Э. д. с. батареи $\mathcal{E} = 120$ В.

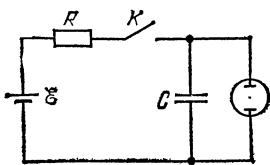


Рис. 3.56.

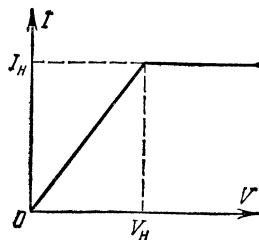


Рис. 3.57.

3.123. В случае несамостоятельного газового разряда зависимость тока через газоразрядную трубку I от напряжения на трубке V имеет вид, показанный на рис. 3.57. При некотором напряжении на трубке V_n ток через трубку достигает насыщения. Ток насыщения $I_n = 10$ мкА. Если трубка, последовательно соединенная с некоторым балластным резистором, подключена к источнику э. д. с. $\mathcal{E} = 2 \cdot 10^3$ В, то ток через трубку $I_0 = 5$ мкА. Как надо изменить сопротивление балластного резистора, чтобы достичь тока насыщения?

3.124. У газоразрядной трубки (см. задачу 3.123) напряжение насыщения $V_n = 1$ кВ, ток насыщения $I_n = 10$ мкА. Трубка с последовательно соединенным балластным резистором, имеющим сопротивление $R = 3 \cdot 10^8$ Ом, подключена к источнику э. д. с. $\mathcal{E} = 6$ кВ. Какой ток установится через трубку и каково будет при этом напряжение на трубке? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

3.125. На рис. 3.58 показана вольтамперная характеристика некоторого нелинейного элемента. До напряжения V_0 ток через элемент отсутствует, а затем линейно растет с напряжением. При включении такого элемента последовательно с источником постоянной э. д. с. и балластным резистором, имеющим сопротивление $R_1 = 300$ кОм, через него протекает ток $I_1 = 0,5$ мА. При уменьшении сопротивления балластного резистора до $R_2 = 100$ кОм ток через элемент возрастает вдвое. Какой ток протечет через элемент, если балластный резистор закоротить?

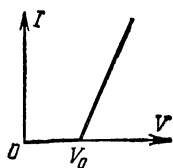


Рис. 3.58.

3.126. У нелинейного элемента (см. задачу 3.125) напряжение $V_0 = 100$ В. При подключении его к батарее постоянной э. д. с. с внутренним сопротивлением $r = 25$ кОм через элемент течет ток $I_1 = 2$ мА, а при подключении его к той же батарее через балластный резистор с сопротивлением $R = r$ течет ток $I_2 = 1$ мА. Определить э. д. с. батареи.

3.127. При каких сопротивлениях резистора R в цепи, изображенной на рис. 3.59, в случае размыкания рубильника может возникнуть дуговой разряд? Известно, что напряжение на участке

дугового разряда связано с током в цепи соотношением $V = A + B/I$, где $A = 10$ В, $B = 100$ В·А. Э. д. с. батареи $\mathcal{E} = 100$ В. Считать, что все сопротивление цепи сосредоточено в резисторе R . Какой ток установится в цепи, если $R = 8$ Ом?

3.128. На рис. 3.60 приведен график зависимости напряжения на разрядном промежутке дугового разряда от тока. Дугу подключают

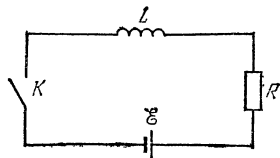


Рис. 3.59.

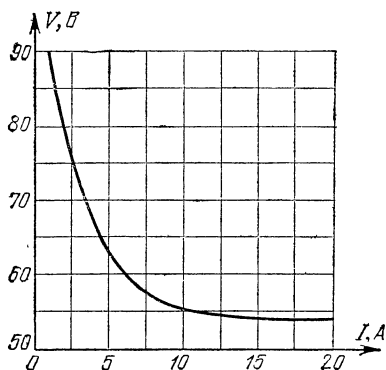


Рис. 3.60.

к источнику постоянного напряжения последовательно с резистором. При каком максимальном сопротивлении резистора дуга может гореть при э. д. с. источника $\mathcal{E} = 85$ В?

3.129. При увеличении тока напряжение на разрядном промежутке дугового разряда уменьшается, стремясь при больших токах к некоторому постоянному значению. Дугу включили в цепь последовательно с некоторым балластным резистором. Вольтамперная характеристика для такой цепи показана на рис. 3.61. Определить ток в цепи при э. д. с. батареи $\mathcal{E} = 80$ В. Построить вольтамперную характеристику дуги в цепи без балластного резистора. Используя полученный график, определить максимальное сопротивление балластного резистора, при котором дуга может гореть. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

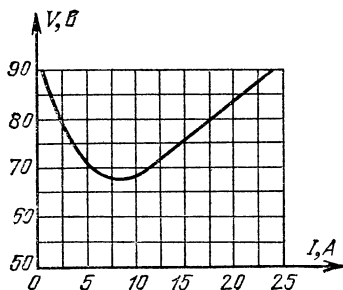


Рис. 3.61.

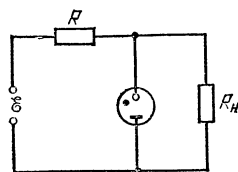


Рис. 3.62.

3.130. Для стабилизации напряжения иногда применяют газоразрядную лампу стабиловольт, схема включения которого показана на рис. 3.62. При изменении тока, протекающего через стабиловольт, от 5 до 15 мА напряжение на нем практически не меняется и остается равным 150 В. Сопротивление нагрузки $R_n = 10$ кОм.

Определить сопротивление резистора R и напряжение \mathcal{E} , при которых напряжение на нагрузке остается постоянным при изменениях входного напряжения \mathcal{E} на $\pm 10\%$.

3.131. На рис. 3.63, а приведена вольтамперная характеристика лампочки от карманного фонаря, включенной в схему, показанную на рис. 3.63, б. Э. д. с. батареи $\mathcal{E} = 4$ В, полное сопротивление потенциометра $R = 40$ Ом, сопротивление резистора $r = 10$ Ом.

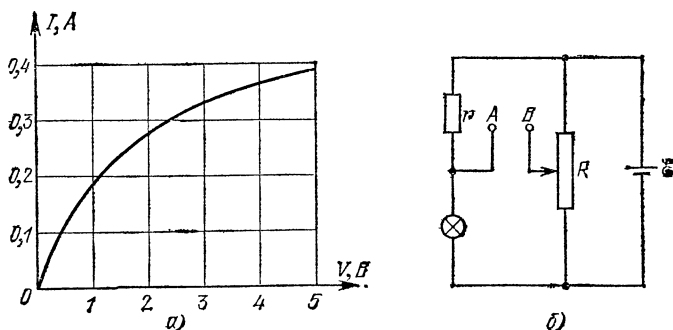


Рис. 3.63.

Найти графически ток в лампочке. При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B равно нулю? При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B почти не будет меняться при небольших изменениях э. д. с. батареи? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

3.132. Имеется нелинейный элемент, в котором ток I связан с приложенным напряжением V соотношением $I = 0,01V^2$ (I — в амперах, V — в вольтах). Этот элемент последовательно с резистором, сопротивление которого $R = 100$ Ом, подключен к батарее с э. д. с. $\mathcal{E} = 15,75$ В. Найти тепло, выделяющееся на нелинейном элементе. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

3.133. В схеме, изображенной на рис. 3.64, э. д. с. батареи $\mathcal{E}_2 = 4$ В, сопротивление резистора $R = 50$ Ом. Имеется нелинейный элемент, в котором ток I связан с приложенным напряжением V соотношением $I = 0,02V^2$ (I — в амперах, V — в вольтах). Схема сбалансирована, т. е. гальванометр показывает отсутствие тока. Определить мощность батареи \mathcal{E}_1 , пренебрегая ее внутренним сопротивлением.

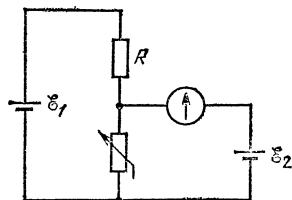


Рис. 3.64.

3.134. На рис. 3.65 приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку подключают к источнику постоянного напряжения $\mathcal{E} = 10$ В последовательно с резистором, сопротивление которого $R = 4$ Ом. Определить мощность лампочки.

3.135. Для исследования свойств нелинейного элемента был произведен ряд экспериментов. Вначале была исследована зависимость сопротивления элемента от температуры. При повышении температуры до $t_1 = 100^\circ\text{C}$ мгновенно происходил скачок сопротивления от $R_1 = 50\text{ Ом}$ до $R_2 = 100\text{ Ом}$; при охлаждении обратный скачок

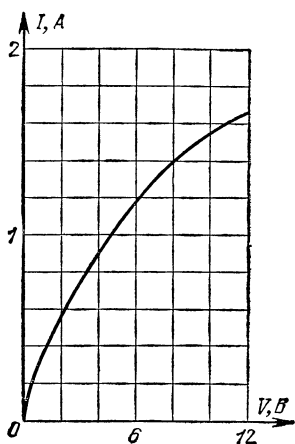


Рис. 3.65.

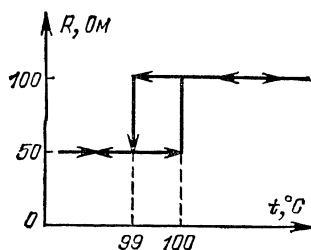


Рис. 3.66.

происходил при температуре $t_2 = 99^\circ\text{C}$ (рис. 3.66). Когда к элементу приложили постоянное напряжение $V_1 = 60\text{ В}$, его температура оказалась равной $t_3 = 80^\circ\text{C}$. Наконец, когда к элементу приложили постоянное напряжение $V_2 = 80\text{ В}$, в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определить период этих колебаний T , а также максимальное и минимальное значения тока. Температура воздуха в лаборатории $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Количество тепла, выделяющееся в единицу времени на элементе, пропорционально разности температур элемента и окружающего воздуха. Теплоемкость элемента $C = 3\text{ Дж/К}$.

Заряженные частицы в электрическом и магнитном полях

3.136. Капелька масла радиуса $r = 1\text{ мкм}$, несущая на себе заряд двух электронов, уравновешена электрическим полем горизонтально расположенного плоского конденсатора, когда к нему приложено напряжение $V = 820\text{ В}$. Расстояние между пластинами $d = 8\text{ мм}$. Плотность масла $\rho = 0,8\text{ г/см}^3$. Найти заряд электрона.

3.137. Заряженная капля масла уравновешена электрическим полем горизонтально расположенного плоского конденсатора. Какое напряжение V подано на пластины конденсатора, если капля при радиусе $r = 2\text{ мкм}$ несет на себе заряд трех электронов? Что произойдет при раздвижении пластин в случае, когда: а) пластины соединены с источником напряжения; б) пластины отключены? Плотность масла $\rho = 0,8\text{ г/см}^3$. Расстояние между пластинами $d = 8\text{ мм}$.

3.138. Ядро атома неона ускоряется разностью потенциалов $V = 2000$ В. Найти скорость v ядра. Атомная масса неона $A = 20$, его номер в периодической системе элементов $Z = 10$.

3.139. Пластины A и D (рис. 3.67) заземлены, сетки B и C имеют по отношению к земле потенциалы 200 и 100 В соответственно. Из пластины A без начальной скорости вылетает электрон. С какими скоростями он пересекает сетки B и C и достигает пластины D ? Отношение заряда электрона к его массе $\gamma = e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

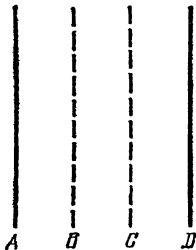


Рис. 3.67.

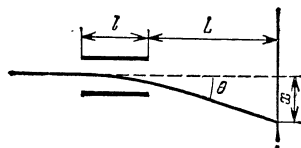


Рис. 3.68.

3.140. Электрон, имеющий кинетическую энергию $T = 10$ кэВ, влетает в плоский конденсатор (рис. 3.68), между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов $V = 40$ В. Расстояние между пластинами $d = 1$ см, их длина $l = 10$ см. На расстоянии $L = 20$ см от конденсатора находится экран. Первоначальная скорость электрона направлена параллельно пластинам. Найти смещение x электрона на экране. Как изменится ответ, если вместо электрона взять протон той же энергии? Силой тяжести пренебречь.

3.141. Внутри незаряженного плоского конденсатора, пластины которого расположены горизонтально на расстоянии $d = 1$ см друг от друга, находится пылинка. Вследствие сопротивления воздуха пылинка падает с постоянной скоростью, так что путь от верхней пластины до нижней она проходит за время $t_0 = 10$ с. Когда пылинка находится у нижней пластины, на конденсатор подается напряжение $V = 980$ В. Через время $t = 5$ с после этого пылинка достигает верхней пластины. Определить отношение заряда пылинки к ее массе. Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной скорости.

3.142. Пылинка массы $m = 10^{-10}$ г падает между вертикальными пластинами плоского конденсатора на одинаковом расстоянии от них. Из-за сопротивления воздуха скорость пылинки постоянна и равна $v = 0,1$ см/с. Конденсатор подключают к источнику высокого напряжения $V = 490$ В, и через время $t = 10$ с пылинка достигает одной из пластин. Определить заряд пылинки. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ см. Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной скорости пылинки.

3.143. В ускоритель для получения ионного пучка, по трубопроводу в единицу времени поступает $m_t = 10$ мг/с аргона. Во входной камере ускорителя аргон полностью однократно ионизуют, а затем производят ускорение ионов Ar^+ разностью потенциалов

$V = 1000$ В. Определить ионный ток в ускорителе и мощность ионного пучка. Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$, атомная масса аргона $A = 40$.

3.144. Одна из пластин незаряженного плоского конденсатора освещается рентгеновскими лучами, вырывающими из нее электроны со скоростью $v = 10^6$ м/с. Электроны собираются на второй пластине. Через какое время фототок между пластинами прекратится, если с каждого квадратного сантиметра площади вырывается еже-секундно $n = 10^{13}$ электронов? Расстояние между пластинами $d = 10$ мм.

3.145. Элемент атомной батареи (источника тока) представляет собой сферический конденсатор. На внутреннюю сферу нанесен радиоактивный препарат, испускающий α -частицы со скоростью $v_0 = 2,2 \cdot 10^6$ м/с. Определить э. д. с. этого элемента. Отношение заряда α -частицы к ее массе $\gamma = 4,8 \cdot 10^7$ Кл/кг.

3.146. Элемент атомной батареи (источника тока) представляет собой конденсатор, на одну из обкладок которого нанесен радиоактивный препарат. Найти э. д. с. батареи, состоящей из двух таких элементов, в случаях, когда они соединены: а) последовательно; б) параллельно. В одном элементе используется источник α -частиц с энергией $T_1 = 2 \cdot 10^4$ эВ, в другом — с энергией $T_2 = 4 \cdot 10^4$ эВ.

3.147. Какова максимальная сила взаимодействия между двумя протонами с энергией $T = 10^6$ эВ, летящими во встречных пучках?

3.148. В разреженной смеси ионизованных водорода и гелия в некоторый момент образовалась система неподвижных частиц,

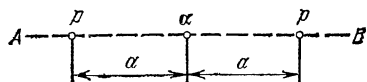


Рис. 3.69.

состоящая из двух протонов и α -частицы (рис. 3.69). Расстояние между частицами $a = 10^{-2}$ см. Под действием электрических сил частицы разлетаются по прямой AB. Определить скорости частиц, когда они окажутся на большом

расстоянии друг от друга. Заряд протона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Отношение заряда протона к его массе $\gamma = 9,58 \cdot 10^7$ Кл/кг.

3.149. Две заряженные частицы находятся в однородном внешнем поле, напряженность которого равна E . Частица массы m несет отрицательный заряд $-q$, частица массы M — положительный заряд $+Q$. На каком расстоянии d друг от друга должны находиться частицы, чтобы ускоряться как единое целое (т. е. не изменяя взаимного расположения)?

3.150. Электрический диполь из двух жестко связанных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, находится в положении устойчивого равновесия в однородном электрическом поле напряженности E . Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть диполь на 180° ?

3.151. В плоский заряженный конденсатор вносится электрический диполь из двух жестко связанных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга. Ориентация диполя в конденсаторе показана на рис. 3.70. Какую работу нужно

было совершить, чтобы внести диполь в конденсатор? Площадь пластин конденсатора равна S , заряд на конденсаторе равен Q .

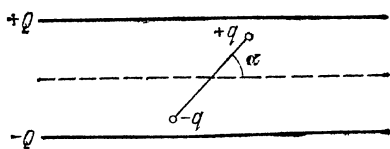


Рис. 3.70.

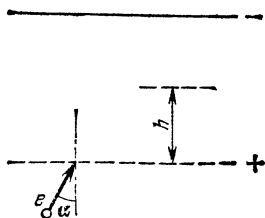


Рис. 3.71.

3.152. Электрон со скоростью $v = 10^9$ см/с влетает в пространство между пластинами плоского конденсатора, между которыми поддерживается разность потенциалов $V = 425$ В (рис. 3.71). Определить максимальное удаление h электрона от нижней пластины конденсатора. Отношение заряда электрона к его массе $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, угол падения электронов $\alpha = 30^\circ$. Расстояние между пластинами $d = 1$ см.

3.153. На две плоскопараллельные сетки, между которыми приложена разность потенциалов V , падает параллельный пучок отрицательно заряженных частиц (рис. 3.72). Угол падения частиц $\alpha = 60^\circ$. При каких энергиях частицы смогут пройти через сетки, если заряд частицы равен q ?

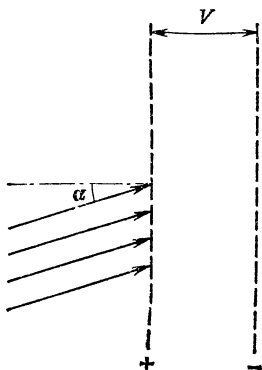


Рис. 3.72.

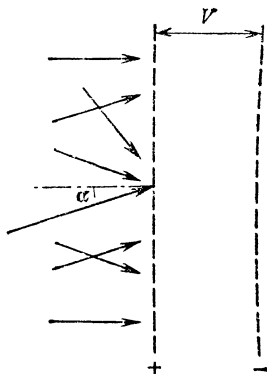


Рис. 3.73.

3.154. На две параллельные сетки, между которыми приложена разность потенциалов V , падают отрицательно заряженные частицы с энергией $4eV/3$ под разными углами (рис. 3.73). При каких углах падения α частицы будут «отражаться», т. е. не смогут пройти через сетки? Заряд частицы равен e .

3.155. Две параллельные сетки подключены к батарее с э. д. с. $\mathcal{E} = 10$ В (рис. 3.74). Под углом 45° к сеткам падает параллельный

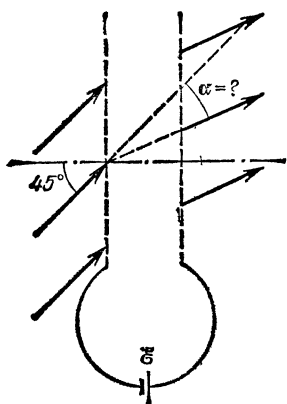


Рис. 3.74.

пучок электронов с начальной энергией $U = 10$ эВ. На какой угол α отклонится пучок, пройдя сетки?

3.156. Под действием светового излучения с поверхности изолированного металлического шарика радиуса r вылетают электроны с начальными скоростями v , в результате чего шарик заряжается. До какого максимального заряда Q можно таким образом зарядить шарик? Отношение заряда электрона к его массе γ считать известным.

3.157. С поверхности металлического шара радиуса R , несущего на себе заряд $-Q$, вылетает электрон. Скорость этого электрона на бесконечно большом расстоянии от шара оказалась равной v .

С какой скоростью v_0 электрон покинул поверхность шара? Отношение заряда электрона к его массе γ считать известным.

3.158. При каком напряжении зажигается неоновая лампа, если энергия ионизации атома $U = 21,6$ эВ, а средняя длина свободного пробега электронов в газе $l = 1$ мм? Расстояние между электродами лампы $d = 1$ см.

3.159. Разность потенциалов между электродами газоразрядной трубки, при которой начинается процесс ионизации атомов гелия электронным ударом, $V = 15$ кВ. Распределение потенциала между электродами в этот момент изображено на рис. 3.75. Определить длину свободного пробега электронов l , если потенциал ионизации атома гелия $V_0 = 24,5$ В.

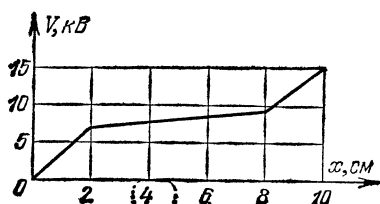


Рис. 3.75.

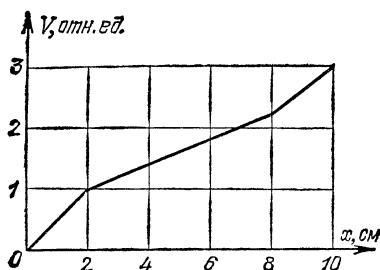


Рис. 3.76.

3.160. Определить разность потенциалов между электродами газоразрядной трубки, при которой начинается процесс ионизации атомов гелия электронным ударом. Распределение потенциала между электродами в этот момент изображено на рис. 3.76, длина свободного пробега электронов $l = 10^{-4}$ м, потенциал ионизации атомов гелия $V_0 = 24,5$ В.

3.161. Протоны со скоростью v_0 движутся по окружности в цилиндрическом конденсаторе (рис. 3.77). Во сколько раз нужно изменить разность потенциалов на конденсаторе, чтобы по той же окружности мог двигаться пучок α -частиц с той же скоростью?

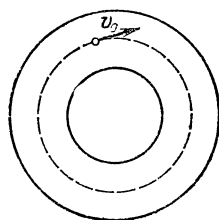


Рис. 3.77.

3.162. Направленный поток электронов вылетает из узкой длинной щели со скоростью $v = 10^5$ м/с. Концентрация электронов в потоке $n = 10^{10}$ м⁻³. На каком расстоянии от щели ширина потока увеличится в два раза? Масса электрона $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

3.163. Из-за наличия объемного заряда в межэлектродном пространстве плоского диода при напряжении на аноде $V_a = 33,75$ В устанавливается распределение потенциала, показанное на рис. 3.78. Какой минимальной энергией должен обладать электрон у катода, чтобы долететь до анода? Чему равно время пролета τ электронов с такой энергией? Отношение заряда электрона к его массе $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, минимальный потенциал $V_T = -2,25$ В.

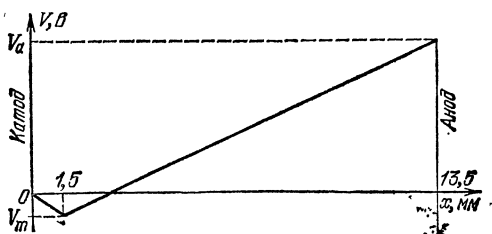


Рис. 3.78.

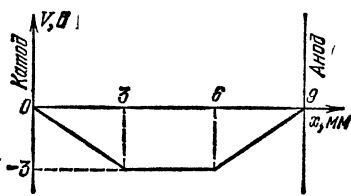


Рис. 3.79.

3.164. Из-за наличия объемного заряда в межэлектродном пространстве плоского диода при напряжении на аноде $V_a = 0$ устанавливается распределение потенциала, показанное на рис. 3.79. Электрон, двигаясь от катода к аноду вдоль оси x , достигает поверхности анода с кинетической энергией $T = 4$ эВ. Определить время пролета τ такого электрона от катода к аноду. Отношение заряда электрона к его массе $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

3.165. Электрон со скоростью $v = 10^9$ см/с влетает в область однородного магнитного поля с индукцией $B = 10^{-3}$ Тл (рис. 3.80). Направление скорости перпендикулярно линиям индукции поля. Определить максимальную глубину h проникновения электрона в область магнитного поля. Отношение заряда электрона к его массе $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, угол падения $\alpha = 30^\circ$.

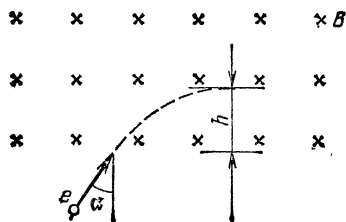


Рис. 3.80.

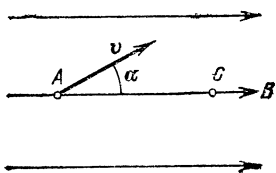


Рис. 3.81.

3.166. Электрон влетает в однородное магнитное поле. В точке A он имеет скорость v , которая составляет с направлением поля угол α (рис. 3.81). При какой индукции магнитного поля электрон окажется в точке C ? Заряд электрона равен e , его масса равна m , расстояние $AC = L$.

3.167. Начальные участки траекторий двух протонов, один из которых до взаимодействия покоился, после соударения имеют радиусы кривизны r и R . Траектории лежат в плоскости, перпендикулярной магнитному полю с индукцией B . Какую энергию имел до соударения двигавшийся протон? Заряд протона равен e , его масса равна m_p .

3.168. С помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле с индукцией B , наблюдают упругое рассеяние α -частиц на ядрах дейтерия. Найти начальную энергию α -частицы, если радиусы кривизны начальных участков траекторий ядра отдачи и рассеянной α -частицы оказались одинаковыми и равными r . Обе траектории лежат в плоскости, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля. Заряд протона равен e , его масса равна m_p .

3.169. Заряженные частицы ускоряются в циклотроне в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл при частоте ускоряющего напряжения $f = 7,5$ МГц. Пучок ускоренных частиц со средним током $I = 1$ мА выводится с орбиты радиуса $R = 1$ м. Насколько будет повышаться температура воды, охлаждающей «лозущку», в которой тормозятся частицы, если массовый расход воды $M_t = 1$ кг/с?

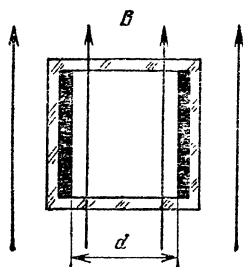


Рис. 3.82.

3.170. Поток проводящей жидкости (расплавленный металл) течет по керамической трубе. Для определения скорости течения жидкости трубу помещают в однородное магнитное поле, перпендикулярное оси трубы, в трубе закрепляют два электрода, образующие плоский конденсатор (рис. 3.82), и измеряют разность потенциалов между электродами. Найти скорость потока, если магнитная индукция поля $B = 0,01$ Тл, расстояние между электродами $d = 2$ см, измеренная разность потенциалов $V = 0,4$ мВ.

3.171. Резерфорд и Бор предложили модель атома водорода, в которой электрон вращается по круговой орбите вокруг небольшого тяжелого положительно заряженного ядра (протона). При переходе с одной орбиты на другую, расположенную ближе к ядру, атом испускает фотон. Какова энергия фотона, испущенного атомом водорода при переходе электрона с орбиты радиуса $r_2 = 2,1 \cdot 10^{-8}$ см на орбиту радиуса $r_1 = 5,3 \cdot 10^{-9}$ см? Заряды электрона и протона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

3.172. В планетарной модели атома водорода (по Резерфорду — Бору) предполагалось, что электрон вращается по круговой орбите вокруг небольшого тяжелого положительно заряженного ядра (протона). Определить радиус атома водорода, если известно, что минимальная энергия, которую нужно сообщить электрону для удаления его из атома (энергия ионизации), $E = 2,2 \cdot 10^{-18}$ Дж. Заряды электрона и протона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

3.173. Оценить по порядку величины диапазон частот высокочастотных сигналов, при усилении которых в ламповых усилителях начинает проявляться инерционность электронов. Расстояние между электродами лампы $d = 0,1$ см. Разность потенциалов между электродами $V = 200$ В. Отношение заряда электрона к его массе $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

3.174. Вблизи сетки 1 справа от нее (рис. 3.83) в результате ионизации атома азота появился свободный электрон, начальную скорость которого можно принять равной нулю. Определить максимальную длину λ электромагнитных волн, излучаемых электроном, движущимся между сетками 1 и 3. Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9,11 \cdot 10^{-28}$ г, остальные данные приведены на рис. 3.83. Как следует изменить потенциал сетки 2, чтобы ион азота начал двигаться между сетками 1 и 3, излучая электромагнитные волны той же максимальной длины λ ?

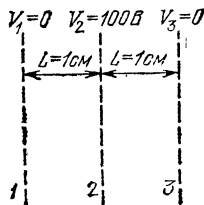


Рис. 3.83.

Электромагнитная индукция. Переменный ток

3.175. Проволочную катушку из n витков помещают в магнитное поле так, что линии индукции перпендикулярны к плоскости витков, и с помощью гибких проводников подсоединяют к гальванометру. При быстром удалении катушки из магнитного поля по цепи протекает некоторый заряд q , измеряемый гальванометром. Определить индукцию магнитного поля B , считая, что все витки имеют одинаковую площадь S , а полное сопротивление цепи равно R .

3.176. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл расположен плоский проволочный виток так, что его плоскость перпендикулярна к линиям индукции. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, протекший через гальванометр при повороте витка, $Q = 9,5 \cdot 10^{-3}$ Кл. На какой угол повернули виток? Площадь витка $S = 10^3$ см², сопротивление витка $R = 2$ Ом.

3.177. При включении магнитного поля, перпендикулярного к плоскости витка радиуса R , по витку протек заряд Q . Какой заряд протечет по витку, если его (при неизменном поле) сложить «восьмеркой», состоящей из двух окружностей, причем радиус меньшей окружности равен $R/4$? Плоскость «восьмерки» также перпендикулярна к магнитному полю.

3.178. Проволочный виток, имеющий площадь $S = 10^2 \text{ см}^2$, разрезан в некоторой точке, и в разрез включен конденсатор емкости $C = 10 \text{ мкФ}$. Виток помещен в однородное магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны к плоскости витка. Индукция магнитного поля равномерно изменяется во времени со скоростью $\Delta B/\Delta t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл/с}$. Определить заряд конденсатора.

3.179. Короткозамкнутая катушка, состоящая из $n = 1000$ витков проволоки, помещена в магнитное поле, линии индукции которого направлены вдоль оси катушки. Площадь поперечного сечения катушки $S = 40 \text{ см}^2$, ее сопротивление $R = 160 \text{ Ом}$. Найти мощность N тепловых потерь, если индукция магнитного поля равномерно изменяется во времени со скоростью $\Delta B/\Delta t = 10^{-3} \text{ Тл/с}$.

3.180. Прямоугольная проволочная рамка со стороной L находится в магнитном поле с индукцией B , перпендикулярном к плоскости рамки. По рамке параллельно одной из ее сторон без нарушения контакта скользит с постоянной скоростью v перемычка ab (рис. 3.84), сопротивление которой равно R . Определить ток через перемычку. Сопротивлением остальной части рамки пренебречь.

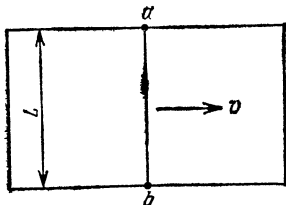


Рис. 3.84.

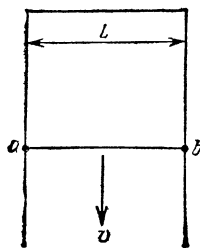


Рис. 3.85.

3.181. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2} \text{ Тл}$ расположены вертикально на расстоянии $L = 50 \text{ см}$ два металлических прута, замкнутых наверху (рис. 3.85). Плоскость, в которой расположены прутья, перпендикулярна к направлению индукции магнитного поля. По прутьям без трения и без нарушения контакта скользит вниз с постоянной скоростью $v = 1 \text{ м/с}$ перемычка ab массы $m = 1 \text{ г}$. Определить сопротивление R перемычки ab . Сопротивлением остальной части системы пренебречь.

3.182. Плоскость прямоугольной проволочной рамки $abcd$ перпендикулярна к однородному магнитному полю с индукцией $B = 10^{-3} \text{ Тл}$ (рис. 3.86). Сторона рамки bc длины $l = 1 \text{ см}$ может скользить без нарушения контакта с постоянной скоростью $v = 10 \text{ см/с}$ по сторонам ab и dc . Между точками a и d включена лампочка с сопротивлением $R = 5 \text{ Ом}$. Какую силу необходимо приложить к стороне bc для осуществления такого движения? Сопротивлением остальной части рамки пренебречь.

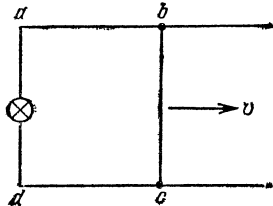


Рис. 3.86.

3.183. Проволочной квадратной рамке массы m со стороной a сообщают в горизонтальном направлении некоторую начальную скорость. Рамка движется в гравитационном поле, все время находясь в магнитном поле, перпендикулярном к плоскости рамки (рис. 3.87). Индукция поля изменяется по закону $B(z) = B_0 + kz$, где k — постоянный коэффициент. Сопротивление рамки равно R . Через некоторое время рамка начинает двигаться с постоянной скоростью v . Найти начальную горизонтальную скорость рамки. Ускорение свободного падения равно g .

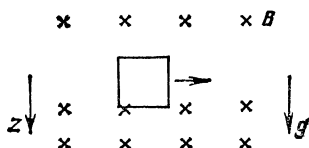


Рис. 3.87.

3.184. Ток в короткозамкнутом сверхпроводящем соленоиде изменяется вследствие несовершенства контакта. Создаваемое этим током магнитное поле уменьшается на 2 % в час. Определить сопротивление контакта R , если индуктивность соленоида $L = 1$ Гн.

3.185. Параллельно соединенные катушка индуктивности L и резистор с сопротивлением R подключены через ключ K к батарее с э. д. с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (рис. 3.88). В начальный момент времени ключ K разомкнут и тока в цепи нет. Какой заряд протечет через резистор после замыкания ключа? Сопротивлением катушки пренебречь.

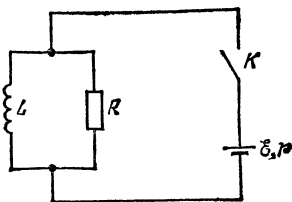


Рис. 3.88.

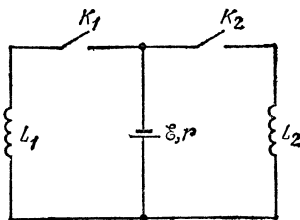


Рис. 3.89.

3.186. Две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с э. д. с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (рис. 3.89). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. После того как ключ K_1 замкнули и ток через катушку L_1 достиг некоторого значения I_0 , замыкают ключ K_2 . Определить установившиеся токи через катушки L_1 и L_2 после замыкания ключа K_2 . Сопротивлениями катушек пренебречь.

3.187. Две катушки с одинаковыми индуктивностями L подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с постоянной э. д. с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (рис. 3.90). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. Затем замыкают ключ K_1 . Определить ток, протекающий через ключ K_1 перед

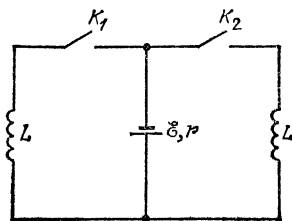


Рис. 3.90.

замыканием ключа K_2 , если известно, что установившийся ток через ключ K_1 после замыкания ключа K_2 в два раза больше установившегося тока через ключ K_2 . Сопротивлениями катушек пренебречь.

3.188. Конденсатор емкости C , заряженный до разности потенциалов V , через ключ K подключен к двум параллельно соединенным катушкам с индуктивностями L_1 и L_2 (рис. 3.91). Если замкнуть ключ K , то через некоторое время конденсатор полностью перезарядится (напряжение на конденсаторе поменяет знак). Какие заряды q_1 и q_2 протекут через катушки за это время? Сопротивлениями катушек пренебречь.

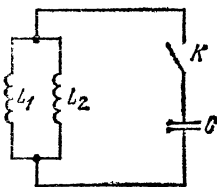


Рис. 3.91.

3.189. Заряженный конденсатор емкости C через ключ K подключен к двум параллельно соединенным катушкам с индуктивностями L_1 и L_2 (рис. 3.91). В начальный момент времени ключ разомкнут. Если замкнуть ключ K , то через катушки потечут токи. Максимальный ток, протекающий через катушку L_1 , оказался равным I_1 . Найти первоначальный заряд на конденсаторе. Сопротивлениями катушек пренебречь.

3.190. Катушки 1 и 2 одинаковой индуктивности L подключены через ключи K_1 и K_2 к конденсатору емкости C (рис. 3.92). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты, а конденсатор заряжен до разности потенциалов V_0 . Сначала замыкают ключ K_1 и, когда напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ K_2 . Определить максимальное напряжение на конденсаторе после замыкания ключа K_2 . Сопротивлениями катушек пренебречь.

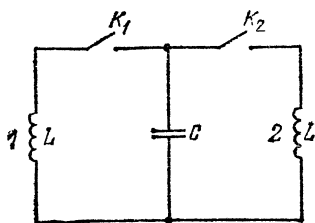


Рис. 3.92.

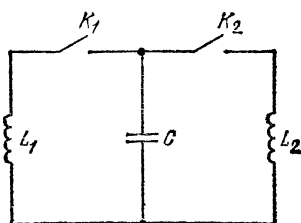


Рис. 3.93.

3.191. Две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 подключены через ключи K_1 и K_2 к конденсатору емкости C (рис. 3.93). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты, а конденсатор заряжен до разности потенциалов V_0 . Сначала замыкают ключ K_1 и, когда напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ K_2 . Определить максимальный и минимальный токи, протекающие через катушку L_1 после замыкания ключа K_2 . Сопротивлениями катушек пренебречь.

3.192. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности L и конденсатора емкости C , через ключ K подключен к источнику с э. д. с. \mathcal{E} с внутренним сопротивлением r (рис. 3.94). Первоначально ключ K замкнут. После установления стационарного режима ключ размыкают и в контуре возникают колебания с периодом T . При этом амплитуда напряжения на конденсаторе в n раз больше э. д. с. батареи. Найти индуктивность катушки и емкость конденсатора. Сопротивлением катушки пренебречь.

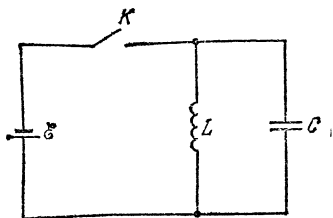


Рис. 3.94.

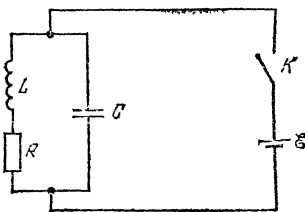


Рис. 3.95.

3.193. Колебательный контур, состоящий из конденсатора емкости C и катушки с индуктивностью L и сопротивлением R , через ключ K подключен к источнику постоянной э. д. с. \mathcal{E} (рис. 3.95). Через некоторое время после замыкания ключа K установится стационарный режим: токи во всех элементах цепи будут постоянны. После этого ключ K снова размыкают. Какое количество тепла выделится в катушке после размыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

3.194. Конденсатор емкости $C_1 = 1$ мкФ заряжен до разности потенциалов $V_0 = 300$ В. К нему через идеальный диод D и катушку индуктивности L подключают незаряженный конденсатор емкости $C_2 = 2$ мкФ (рис. 3.96). До какой разности потенциалов он зарядится после замыкания ключа K ? Индуктивность L достаточно велика, так что процесс перезарядки происходит медленно.

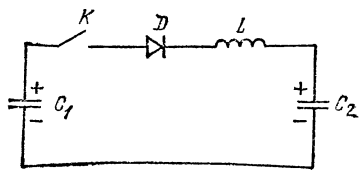


Рис. 3.96.

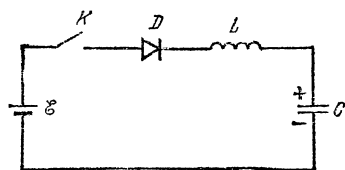


Рис. 3.97.

3.195. В схеме, изображенной на рис. 3.97, конденсатор емкости C заряжен вначале зарядом q_0 . До какой разности потенциалов зарядится конденсатор, если замкнуть ключ K ? Э. д. с. батареи равна \mathcal{E} . Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. Диод D считать идеальным. Индуктивность L достаточно велика, так что процесс зарядки идет медленно.

3.196. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности L , конденсатора емкости C и идеального диода D (рис. 3.98), через ключ K на время τ подключают к источнику постоянной э. д. с. \mathcal{E} , а затем отключают. Найти зависимость напряжения на конденсаторе от времени после размыкания ключа. Представить графически эту зависимость. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением катушки пренебречь.

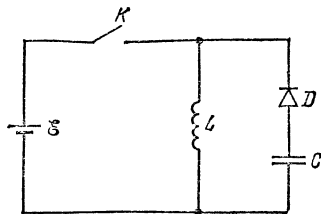


Рис. 3.98.

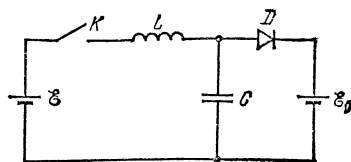


Рис. 3.99.

3.197. В схеме, изображенной на рис. 3.99, э. д. с. батареи \mathcal{E}_0 больше э. д. с. батареи \mathcal{E} . Определить заряд, который протечет через батарею с э. д. с. \mathcal{E}_0 при замыкании ключа K . Внутренним сопротивлением обеих батарей и сопротивлением катушки пренебречь. Диод D считать идеальным. Конденсатор емкости C до замыкания ключа был незаряжен.

3.198. На железный сердечник, форма которого показана на рис. 3.100, намотаны две катушки. Магнитный поток, создаваемый каждой катушкой, не выходит из железного сердечника и делится поровну между разветвлениями. При включении катушки 1 в цепь переменного тока с напряжением $V_1 = 40$ В напряжение на катушке 2 равно V . Какое напряжение будет на зажимах катушки 1, если катушку 2 включить в цепь переменного тока с напряжением V ?

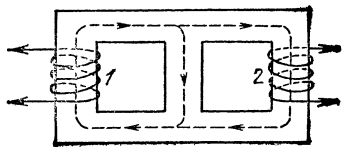


Рис. 3.100.

3.199. На симметричный железный сердечник намотаны две катушки (рис. 3.100). При включении катушки 1 в сеть переменного тока напряжение на зажимах катушки 2 $V_2 = 13,2$ В. При включении катушки 2 в ту же сеть напряжение на зажимах катушки 1 $V_1 = 120$ В. Определить отношение чисел витков катушек. Считать, что магнитный поток, создаваемый каждой катушкой, не выходит из сердечника.

3.200. Электромотор питается от батареи с э. д. с. $\mathcal{E} = 12$ В. Какую мощность N развивает мотор при протекании по его обмотке тока $I = 2$ А, если при полном затормаживании якоря по цепи течет ток $I_0 = 3$ А?

3.201. Чему равен к. п. д. электромотора, если при включении его в сеть постоянного тока ток $I_0 = 15$ А, а в установившемся режиме ток снижается до $I = 9$ А?

3.202. Электровоз движется со скоростью $v = 36$ км/ч и развивает в среднем силу тяги $F = 5 \cdot 10^4$ Н. Найти ток, проходящий через мотор электровоза (без учета тепловых потерь), если напряжение на нем $V = 500$ В.

3.203. Какую э. д. с. развивает генератор постоянного тока, если при сопротивлении цепи $R = 300$ Ом на вращение ротора затрачивается мощность $N = 50$ Вт, а потери на трение составляют $\alpha = 4\%$ от затраченной мощности? Какую мощность для поддержания того же числа оборотов необходимо затрачивать при сопротивлении цепи $R_1 = 60$ Ом?

3.204. Электромотор постоянного тока, включенный в цепь батареи с э. д. с. $\mathcal{E} = 24$ В, при полном сопротивлении цепи $R = 20$ Ом делает $n_1 = 600$ об/мин при токе в цепи $I = 0,2$ А. Какую э. д. с. разовьет тот же мотор, работая в качестве генератора, при $n_2 = 1400$ об/мин?

3.205. Электрический паяльник мощности $N = 50$ Вт рассчитан на включение в сеть переменного тока с напряжением $V = 127$ В. Какая мощность будет выделяться в паяльнике, если его включить в сеть переменного тока с напряжением $V_1 = 220$ В последовательно с идеальным диодом? Сопротивление паяльника считать постоянным.

3.206. Какая мощность выделяется в цепи переменного тока, изображенной на рис. 3.101? К клеммам 1 и 2 приложено напряжение $V = 220$ В, сопротивления резисторов $R_1 = R_2 = R_3 = 200$ Ом. Параллельно резистору R_1 включен идеальный диод D .

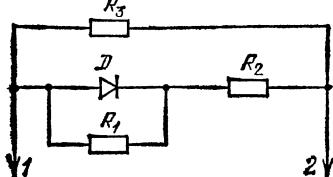


Рис. 3.101.

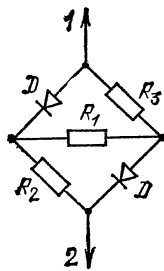


Рис. 3.102.

3.207. Какая мощность выделяется на резисторе $R_1 = 10$ кОм в цепи переменного тока, изображенной на рис. 3.102? К клеммам 1 и 2 приложено напряжение $V = 127$ В, сопротивления резисторов $R_2 = R_3 = 5$ кОм. Диоды D считать идеальными.

3.208. Выпрямитель с идеальным выпрямляющим элементом подключен к сети переменного тока с напряжением $V = 220$ В и частотой $f = 50$ Гц (рис. 3.103). Во сколько раз изменится мощность, рассеиваемая на резисторе с сопротивлением R при замыкании ключа K ,

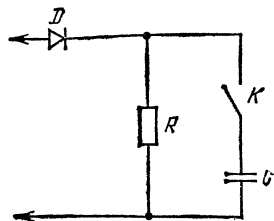


Рис. 3.103.

если известно, что за период переменного тока конденсатор емкости C практически не успевает разряжаться через резистор? Какому условию должны подчиняться параметры цепи?

IV. ОПТИКА

Отражение и преломление света

4.1. Размеры заднего окна автомобиля $B \times H = 120 \times 45$ см². Водитель сидит на расстоянии $l = 2$ м от заднего окна. Каковы должны быть минимальные размеры плоского зеркала заднего вида, висящего на расстоянии $l_0 = 0,5$ м перед водителем, чтобы водитель имел наилучший обзор дорожной обстановки за автомобилем?

4.2. Стеклянная пластинка толщины $d = 3$ мм имеет на верхней и нижней сторонах царапины. Чему равен показатель преломления стекла, если при наведении микроскопа с верхней царапины на нижнюю его тубус пришлось опустить на расстояние $l = 2$ мм? Углы отклонения от оси микроскопа лучей, попадающих в объектив, считать малыми.

4.3. Палка с изломом посередине погружена в пруд так, что наблюдателю, находящемуся на берегу и смотрящему вдоль надводной части палки, она кажется прямой, составляющей угол α с горизонтом. Какой угол излома имеет палка? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

4.4. На дне сосуда, заполненного водой, лежит плоское зеркало. Человек, наклонившийся над сосудом, видит изображение своего глаза в зеркале на расстоянии наилучшего зрения $d = 25$ см, когда расстояние от глаза до поверхности воды $h = 5$ см. Определить глубину сосуда. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

4.5. Под каким углом световой луч падает на плоскую поверхность стекла, если отраженный и преломленный лучи образуют между собой прямой угол? Скорость света в стекле $v = 2 \cdot 10^8$ м/с.

4.6. Равнобедренная стеклянная призма с малыми углами преломления α помещена в параллельный пучок лучей, падающих нормально к ее основанию (рис. 4.1). Показатель преломления стекла $n = 1,57$, размер основания $2a = 5$ см. Найти угол преломления α , если в середине экрана, расположенного на расстоянии $L = 100$ см от призмы, образуется темная полоса ширины $2d = 1$ см.

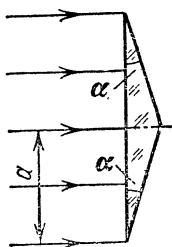


Рис. 4.1.

4.7. На рис. 4.2 показан симметричный ход луча в равнобедренной призме с углом при вершине $\alpha = 30^\circ$ (внутри призмы луч распространяется параллельно основанию). Найти угол отклонения луча β . Показатель преломления призмы $n = 2$.

4.8. Жидкость помещают в юксету, имеющую вид равнобедренной призмы с углом при вершине α . Призма освещается параллельным пучком света так, что лучи внутри жидкости идут параллельно основанию. Оказалось, что угол отклонения вышедшего пучка от первоначального направления распространения равен β . Найти показатель преломления жидкости.

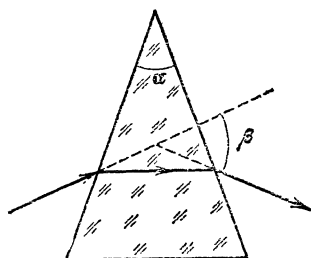


Рис. 4.2.

4.9. На стеклянный клин перпендикулярно его грани падает тонкий луч света (рис. 4.3). Показатель преломления стекла $n = 1,41$, угол при вершине $\alpha = 10^\circ$. Сколько светлых пятен будет видно на экране, поставленном за клином?

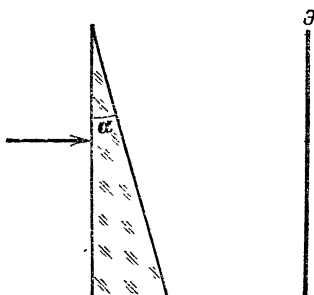


Рис. 4.3.

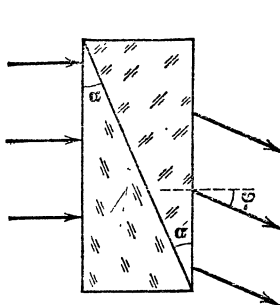


Рис. 4.4.

4.10. Две одинаковые прямоугольные призмы с углом при вершине α имеют несколько отличающиеся показатели преломления. Призмы приложены друг к другу так, как показано на рис. 4.4. При освещении системы параллельным пучком света, падающим нормально к передней грани, оказалось, что выходящий пучок отклонился от первоначального направления распространения на угол φ . Насколько отличаются друг от друга показатели преломления призм? Углы φ и α малы.

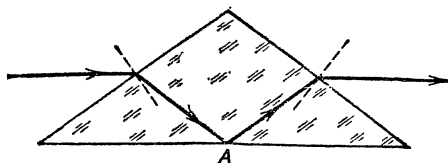


Рис. 4.5.

4.11. На рис. 4.5 дан ход одного из лучей в равнобедренной призме, который до и после призмы распространяется параллельно ее основанию. Показать, что при любом показателе преломления призмы $n > 1$ в точке A происходит полное внутреннее отражение.

4.12. На рис. 4.6 дан ход одного из лучей в равнобедренной призме с прямым углом при вершине. При каких углах падения α луч света выйдет из призмы, испытав дважды полное внутреннее отражение на гранях AB и BC ? Показатель преломления призмы $n = 2$.

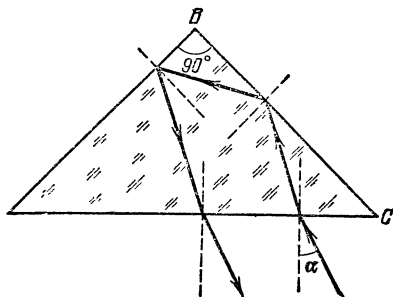


Рис. 4.6.

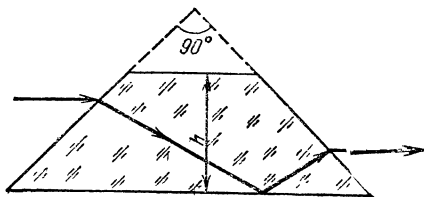


Рис. 4.7.

4.13. Для обращения изображения часто используют призму Дове (рис. 4.7), представляющую собой усеченную прямоугольную равнобедренную призму. Определить минимальную длину основания призмы, при которой пучок света, целиком заполняющий боковую грань, полностью пройдет через призму. Высота призмы $h = 2,1$ см. Показатель преломления стекла $n = 1,41$.

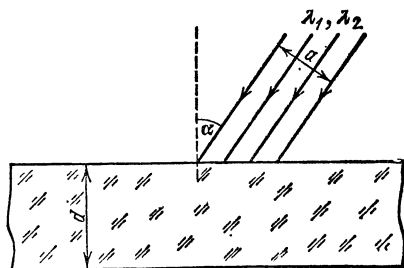


Рис. 4.8.

4.14. В равнобедренной прямоугольной стеклянной призме основание AC и боковая грань BC — гладкие, а грань AB — матовая. Призма стоит основанием на газете. Наблюдатель, смотрящий через гладкую грань BC , видит часть текста, находящегося под основанием AC , равную $k = 0,895$ (по площади). Каков показатель преломления стекла?

4.15. На плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом α падает пучок света ширины a (рис. 4.8), содержащий две спектральные компоненты (с длинами волн λ_1 и λ_2). Показатели

преломления стекла для этих длин волн различны: n_1 (для λ_1) и n_2 (для λ_2). Определить минимальную толщину d пластинки, при которой свет, пройдя через пластинку, будет распространяться в виде двух отдельных пучков, каждый из которых содержит только одну спектральную компоненту.

4.16. Свет от удаленного источника, состоящий из красного и зеленого света, параллельным пучком падает перпендикулярно на одну из преломляющих граней призмы с малым углом преломления α . За призмой установлена линза с фокусным расстоянием f так, что ее оптическая ось совпадает с направлением падающего на призму пучка света. Оказалось, что расстояние между изображениями источника в фокальной плоскости линзы в красном и зеленом свете равно l . Определить разность показателей преломления призмы для красного и зеленого света. Углы отклонения лучей от оптической оси линзы считать малыми.

4.17. В спектре излучения аргонового лазера наиболее интенсивными являются линии с длинами волн $\lambda_1 = 488$ нм и $\lambda_2 = 515$ нм. При каких углах преломления α призмы, поставленной на пути лучей, из призмы выйдет пучок, содержащий компоненту λ_2 и не содержащий компоненту λ_1 ? На первую грань призмы лучи падают нормально. Зависимость показателя преломления призмы от длины волны имеет вид $n = 1 + a/\lambda^2$, где $a = 2,38 \cdot 10^{-9}$ см².

4.18. Для измерения показателя преломления n стеклянной призмы с углом при вершине $\alpha = 30^\circ$ была использована схема,

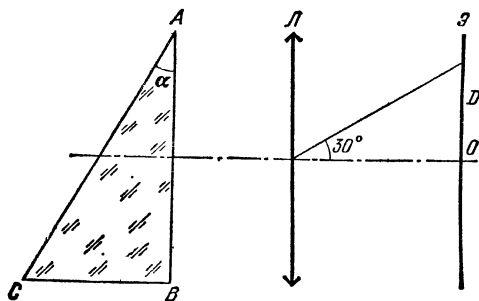


Рис. 4.9.

показанная на рис. 4.9. Призма помещалась перед собирающей линзой так, что грань AB была перпендикулярна к оптической оси линзы. В фокальной плоскости линзы помещался экран, на котором при освещении грани AC рассеянным светом можно было наблюдать две области: освещенную и неосвещенную. Отрезок, соединяющий на схеме границу между областями (точку D) с центром линзы, оказался расположенным под углом 30° к оптической оси линзы. Определить показатель преломления n призмы.

4.19. На дне сосуда, наполненного водой до высоты h , находится точечный источник света S . На поверхности воды плавает круглый диск так, что центр диска находится над источником света. При каком минимальном радиусе диска ни один луч не выйдет через поверхность воды? Показатель преломления воды равен n .

4.20. Прямоугольный стеклянный сосуд наполнен жидкостью и освещается снизу лампочкой, расположенной под сосудом вблизи его дна. Каков минимальный показатель преломления жидкости n , при котором лампочку нельзя увидеть сквозь боковые стенки сосуда?

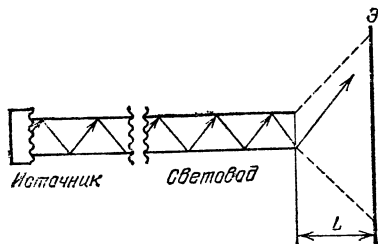


Рис. 4.10.

4.21. Световод (длинная тонкая нить) изготовлен из прозрачного материала с показателем преломления $n = 1,2$. Один из торцов световода прижат к источнику рассеянного света, другой торец размещен на расстоянии $L = 5$ см от экрана (рис. 4.10). Найти диаметр светового пятна на экране.

4.22. Пучок длинных тонких нитей, выполненных из прозрачного материала с показателем преломления $n = 1,41$, образует световод. Под каким максимальным углом φ_{\max} к оси световода может падать световой луч на торец, чтобы пройти световод без ослабления?

4.23. Два плоских зеркала одинаковой ширины $L = 5$ см поставлены под углом $\alpha = 12^\circ$ друг к другу (рис. 4.11) и образуют световод. Расстояние между правыми краями зеркал $d = 2$ см. Левые края опираются на светочувствительную цилиндрическую поверхность фотоприемника. Под каким максимальным углом φ_{\max} к оси световода может падать световой луч, чтобы попасть на фотоприемник?

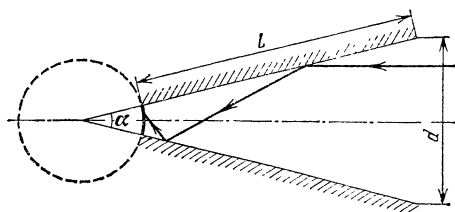


Рис. 4.11.

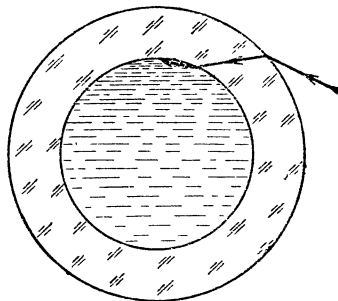


Рис. 4.12.

4.24. В стеклянную капиллярную трубку налита жидкость (рис. 4.12), показатель преломления которой n меньше показателя преломления стекла $n_{\text{ст}}$. При каких соотношениях между внутренним r и наружным R радиусами капилляра любой луч, падающий

на внешнюю поверхность капилляра, частично проникает в жидкость?

4.25. Внутри стеклянной капиллярной трубки находится газ при низком давлении, в котором зажжен электрический разряд, так что весь столб газа является источником рассеянного излучения. Под каким максимальным углом φ_{\max} к радиусу может выйти световой луч через внешнюю стенку капилляра? Внутренний и внешний радиусы капилляра $r = 2$ мм и $R = 4$ мм.

4.26. Человек смотрит на рыбку, находящуюся в диаметрально противоположной от него точке шарового аквариума радиуса R . Насколько смещено при этом изображение рыбки относительно самой рыбки? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

4.27. Два concentрических полушара изготовлены из стекла с различными показателями преломления (рис. 4.13). Построить ход луча AB , если отношение радиусов шаров равно отношению показателей преломления.

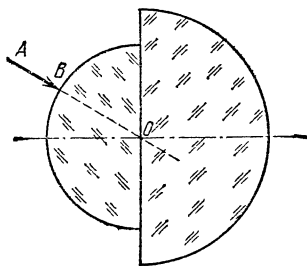


Рис. 4.13.

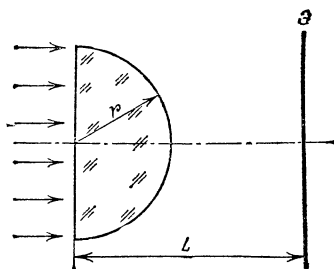


Рис. 4.14.

4.28. На половину шара радиуса $r = 2$ см, изготовленного из стекла с показателем преломления $n = 1,41$, падает параллельный пучок лучей (рис. 4.14). Определить радиус светлого пятна на экране, расположенном на расстоянии $L = 4,82$ см от центра шара.

4.29. Параллельный пучок лучей падает на стеклянный шар. Лучи, дважды испытавшие преломление на границе стекло — воздух (рис. 4.15), выходят из шара по направлениям, составляющим с первоначальным углом φ , не превышающий 90° . Определить показатель преломления стекла.

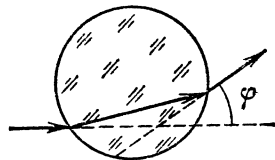


Рис. 4.15.

4.30. Положение звезды, видимое с Земли, немного отличается от истинного из-за преломления лучей атмосферой. Определить ошибку при фиксировании углового положения звезды, видимой с Земли под углом 45° к вертикали. Показатель преломления воздуха у поверхности Земли $n = 1,0003$.

4.31. Принимая на Земле радиосигнал со спутника, можно определить его угловое положение. Преломление радиоволн в атмосфере приводит при этом к небольшой ошибке. Так, для спутника, види-

мого под углом 45° к вертикали, ошибка составляет 2 угл. мин. Определить показатель преломления радиоволн в приземном слое атмосферы.

4.32. Стекланный плоскопараллельный сосуд установлен между двумя тонкими собирающими линзами перпендикулярно к оптической оси линз (рис. 4.16). Точечный источник света S расположен в фокусе линзы L_1 . На экране наблюдается изображение источника, когда в сосуде нет жидкости. Найти вертикальное смещение этого изображения, если сосуд заполнить прозрачной жидкостью, показатель преломления которой меняется с высотой по закону $n(y) = n_0 + \alpha y$. Толщина слоя жидкости равна L , фокусное расстояние линзы L_2 равно f . Изменение показателя преломления с высотой считать малым в пределах диаметра светового пучка.

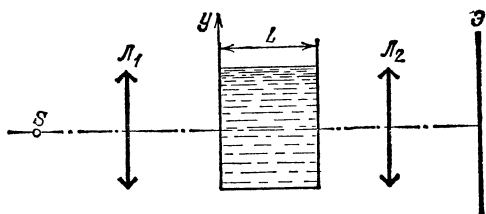


Рис. 4.16.

жидкостью, показатель преломления которой меняется с высотой по закону $n(y) = n_0 + \alpha y$. Толщина слоя жидкости равна L , фокусное расстояние линзы L_2 равно f . Изменение показателя преломления с высотой считать малым в пределах диаметра светового пучка.

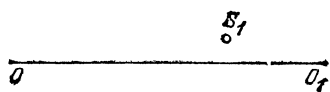


Рис. 4.17.

Тонкие линзы

4.33. На рис. 4.17 изображены точечный источник света S , его изображение S_1 , полученное с помощью линзы OO_1 . Определить построением положение линзы и найти ее фокус. Действительное или мнимое это изображение?

4.34. На рис. 4.18 дан ход луча ABC через рассеивающую линзу. Определить построением фокус линзы.

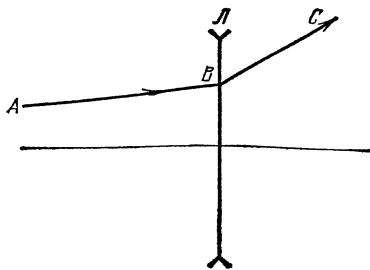


Рис. 4.18.

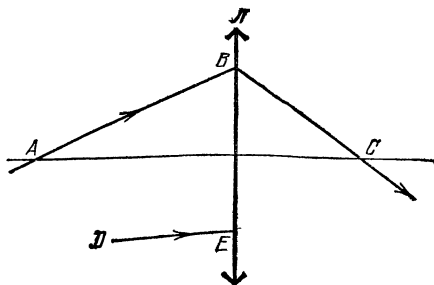


Рис. 4.19.

4.35. На рис. 4.19 дан ход луча ABC через собирающую линзу. Построить ход произвольного луча DE . Рассмотреть случаи, когда точка пересечения лучей AB и DE лежит слева и справа от линзы.

4.36. На рис. 4.20 изображены точечный источник света S , его изображение S_1 , полученное с помощью собирающей линзы, и ближайший к источнику фокус линзы F . Расстояния $SF = l$ и $SS_1 = L$ заданы. Определить положение линзы и ее фокусное расстояние.

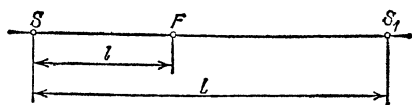


Рис. 4.20.

4.37. С помощью собирающей линзы получают изображения двух точечных источников A и B . Источник A расположен на двойном фокусном расстоянии от линзы; источник B смещен от оси на небольшое расстояние так, что линия, соединяющая оба источника, образует с оптической осью угол $\varphi = 30^\circ$ (рис. 4.21).

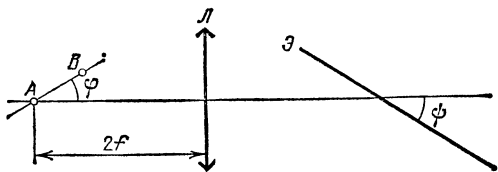


Рис. 4.21.

Под каким углом к оптической оси следует расположить плоский экран, чтобы одновременно получить на нем четкие изображения обоих источников?

4.38. На каком расстоянии a от собирающей линзы надо поместить предмет, чтобы расстояние между предметом и его действительным изображением было минимальным? Фокусное расстояние линзы равно f .

4.39. Расстояние между точечным источником света и экраном равно L . Линза, помещенная между ними, дает на экране четкое изображение при двух положениях, расстояние между которыми равно l . Определить фокусное расстояние линзы.

4.40. Расстояние по оси между предметом и его прямым изображением, даваемым линзой, $l = 5$ см. Линейное увеличение $\beta = 0,5$. Определить фокусное расстояние линзы.

4.41. С помощью линзы на экране получено изображение предмета с увеличением $\beta = 2$. Каково будет увеличение, если расстояние между предметом и экраном увеличить в 1,6 раза?

4.42. Линза с фокусным расстоянием $f = 12$ см создает на экране изображение предмета с увеличением $\beta_1 = 9$. Другая линза при том же расстоянии между предметом и экраном дает увеличение $\beta_2 = 3$. Найти фокусное расстояние второй линзы.

4.43. Осветитель, предназначенный для получения направленных световых пучков, состоит из точечного источника света и линзы диаметра $D = 6$ см с фокусным расстоянием $f = 15$ см. На каком расстоянии от линзы должен быть расположен источник, чтобы лучи, прошедшие через линзу, образовали на экране световое пятно диаметра $d = 4$ см? Расстояние от линзы до экрана $L = 100$ см.

4.44. Предмет и его прямое изображение расположены симметрично относительно фокуса линзы. Расстояние от предмета до фокуса линзы $l = 4$ см. Найти фокусное расстояние линзы.

4.45. Расстояние от заднего фокуса собирающей линзы до изображения в 9 раз больше расстояния от переднего фокуса до предмета. Найти увеличение линзы.

4.46. С помощью линзы получают действительное изображение предмета с увеличением $\beta = 1,5$. Затем линзу передвигают на расстояние $l = 12$ см и получают мнимое изображение такого же размера. Определить фокусное расстояние линзы.

4.47. Линзу, дающую действительное изображение предмета, передвинули на расстояние, равное ее фокусному расстоянию.

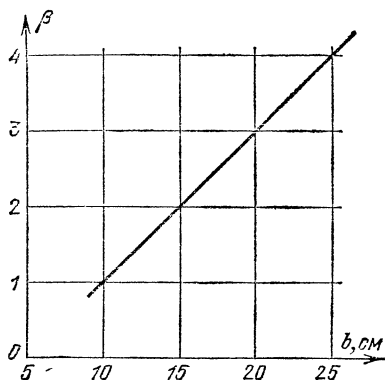


Рис. 4.22.

При этом получилось мнимое изображение того же размера. Найти увеличение линзы.

4.48. Опытным путем определили зависимость увеличения β от расстояния b между линзой и экраном, на котором получают изображение предмета (рис. 4.22). Найти фокусное расстояние линзы.

4.49. Предмет в виде отрезка длины l расположен вдоль оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием f . Середина отрезка расположена на расстоянии a от линзы, и линза дает

действительное изображение всех точек предмета. Определить продольное увеличение предмета.

4.50. С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием f получено объемное действительное изображение прозрачного кубика со стороной l . Изображение ближней к линзе грани кубика находится на расстоянии $2f$ от линзы. Найти объем полученного изображения.

4.51. Точечный источник света расположен на расстоянии $a = 30$ см от собирающей линзы, оптическая сила которой $D = 5$ дптр. На какое расстояние сместится изображение источника, если между линзой и источником поместить толстую стеклянную

пластинку толщины $L = 15$ см с показателем преломления $n = 1,5$?

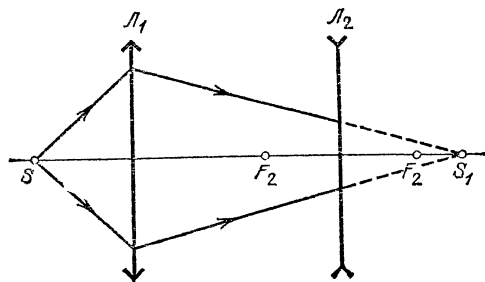


Рис. 4.23.

4.52. Собирающая линза \mathcal{L}_1 дает в точке S_1 действительное изображение источника S , расположенного на оптической оси линзы (рис. 4.23). Между линзой \mathcal{L}_1 и изображением S_1 поставлена рассеивающая линза \mathcal{L}_2 , положения фокусов которой заданы.

Найти построением новое положение изображения источника. Рассмотреть случай, когда расстояние между S_1 и L_2 больше фокусного расстояния линзы L_2 .

4.53. Собирающая линза L_1 дает в точке S_1 действительное изображение точечного источника S , расположенного на оптической оси линзы (рис. 4.24). Между источником S и линзой L_1 поставлена еще одна собирающая линза L_2 , положения фокусов которой заданы. Найти построением новое положение изображения источника. Рассмотреть случай, когда расстояние между S и L_2 меньше фокусного расстояния линзы L_2 .

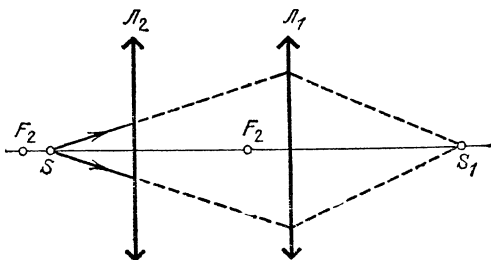


Рис. 4.24.

4.54. Источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на ее оси. За линзой перпендикулярно к оптической оси помещено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы нужно поместить зеркало, чтобы лучи, отраженные от зеркала, пройдя вторично через линзу, стали параллельными?

4.55. Человек решил рассмотреть свой глаз с помощью линзы (фокусное расстояние $f = 10$ см) и плоского зеркала. При этом линза была расположена на расстоянии $a = 15$ см от глаза. На каком расстоянии за линзой следует расположить зеркало, чтобы рассматриваемое изображение оказалось на расстоянии наилучшего зрения $d = 25$ см?

4.56. Человек рассматривает изображение своего глаза в плоском зеркале, расположенном на расстоянии $a = 20$ см. Если на пути лучей поместить вплотную к зеркалу собирающую линзу, то угловой размер изображения увеличивается в $\gamma = 1,5$ раза *). При этом изображение остается мнимым. Каково фокусное расстояние линзы?

4.57. Источник света помещен на расстоянии $a_1 = 120$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $f_1 = 30$ см. По другую сторону линзы в ее фокальной плоскости помещена рассеивающая линза. Каково фокусное расстояние f_2 рассеивающей линзы, если лучи после прохождения второй линзы кажутся исходящими из самого источника?

4.58. Источник света помещен на расстоянии $a_1 = 20$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $f_1 = 12$ см. На каком расстоянии за собирающей линзой может быть помещена рассеивающая линза с фокусным расстоянием $f_2 = -16$ см, с тем чтобы изображение источника света оставалось действительным? Источник находится на оптической оси системы

*) Угловым увеличением называют отношение тангенсов углов, образованных выходящими и входящими в оптическую систему лучами с оптической осью.

4.59. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями f_1 и $f_2 = 3f_1$ расположены на расстоянии $2f_1$ друг от друга. Предмет находится на оптической оси со стороны короткофокусной линзы. При каких положениях предмета эта оптическая система дает прямое изображение?

4.60. Оптическая система состоит из двух линз с одинаковыми фокусными расстояниями $f_1 = f_2 = f$, расположенных на расстоянии $l = f/2$ друг от друга. При каких положениях предмета его изображение будет мнимым? Предмет находится на оптической оси системы.

4.61. Оптическая система состоит из двух линз с фокусными расстояниями $f_1 = +5$ см и $f_2 = -5$ см, раздвинутых на расстояние $l = 5$ см. При каких положениях предмета (со стороны линзы L_1) эта система будет давать мнимое изображение?

4.62. Оптическая система состоит из двух линз с фокусными расстояниями $f_1 = -10$ см и $f_2 = +10$ см, раздвинутых на расстояние $l = 5$ см. При каких положениях предмета (со стороны линзы L_1) эта система будет давать действительное изображение?

4.63. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями f_1 и f_2 расположены на одной оси. С помощью этой системы линз получают изображение предмета, причем оказалось, что размер изображения не зависит от расстояния между предметом и системой линз. Найти расстояние l между линзами.

4.64. Две разные собирающие линзы расположены на расстоянии $l = 60$ см, равном сумме их фокусных расстояний. Если на расстоянии $a = 80$ см перед одной из линз расположить предмет, то его изображение будет располагаться на расстоянии $b = 10$ см за второй линзой. Определить фокусные расстояния линз.

4.65. Оптическая система состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием $f_1 = 30$ см и рассеивающей с фокусным расстоянием $f_2 = -30$ см. Линзы расположены так, что их главные оптические оси совпадают. Параллельный пучок лучей падает на первую линзу и, пройдя через систему, собирается в некоторой точке, лежащей на оптической оси. Насколько сместится эта точка, если линзы поменять местами?

4.66. Для определения фокусного расстояния рассеивающей линзы на оптической скамье расположили (рис. 4.25): масштабную линейку AB , на расстоянии $a = 15$ см от нее собирающую линзу с фокусным расстоянием $f_1 = 10$ см, исследуемую рассеивающую линзу и зрительную трубу T ,

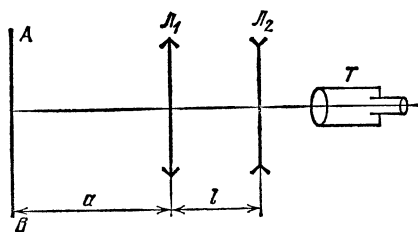


Рис. 4.25.

установленную на бесконечность (т. е. настроенную для рассматривания удаленных предметов). Оказалось, что, если рассеивающую линзу расположить на расстоянии $l = 10$ см от собирающей, в окуляре трубы наблюдается четкое изображение линейки. Определить фокусное расстояние f_2 .

4.67. Объектив состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием $f_1 = 20$ см и рассеивающей с фокусным расстоянием $f_2 = -10$ см. Линзы расположены на расстоянии $l = 15$ см друг от друга. С помощью объектива получают на экране изображение Солнца. Какое фокусное расстояние f должна иметь линза, чтобы изображение Солнца, полученное с ее помощью, имело такой же размер?

4.68. Справа от собирающей линзы L_1 с фокусным расстоянием $f_1 = 2$ см расположена рассеивающая линза L_2 . Оси линз совпадают, расстояние между линзами равно l . Система дает действительное изображение предмета. Затем линзу L_2 помещают слева от линзы L_1 на расстоянии l от нее. При этом взаимное расположение линзы L_1 и предмета не изменяют. Система снова дает действительное изображение предмета, причем размер изображения остался прежним. Определить расстояние l .

4.69. Объектив состоит из двух собирающих линз с фокусными расстояниями $f_1 = 5$ см и $f_2 = 15$ см. Линзы расположены на расстоянии $l = 10$ см друг от друга. Определить положения главных фокусов объектива.

4.70. Объектив состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием $f_1 = 15$ см и рассеивающей с фокусным расстоянием $f_2 = -15$ см. Линзы расположены на расстоянии $l = 10$ см друг от друга. Определить положения главных фокусов объектива.

4.71. С помощью системы из двух собирающих линз рассматривают стену, находящуюся на расстоянии $a = 100$ м от передней линзы. Задний фокус первой линзы и передний фокус второй линзы совпадают. Расстояние между линзами $l = 30$ см. Угловое увеличение системы $\gamma = 1/2$. В фокальной плоскости первой линзы установлена диафрагма диаметра $d = 4$ мм. Каковы размеры области на стене, видимой через эту систему?

4.72. Система из двух линз — собирающей L_1 и рассеивающей L_2 — имеет угловое увеличение $\gamma = 25$. Задний фокус линзы L_1 совпадает с передним фокусом линзы L_2 . Через эту систему свет от звезды попадает на фотоприемник, расположенный непосредственно за линзой L_2 . Каков должен быть диаметр линзы L_1 , чтобы была полностью засвечена чувствительная площадка фотоприемника, имеющая диаметр $d = 4$ мм?

4.73. Показать, что оптическая сила системы, состоящей из двух линз, приложенных вплотную друг к другу, равна сумме оптических сил этих линз.

4.74. Из тонкой плоскопараллельной стеклянной пластинки изготовлены три линзы (рис. 4.26). Оказалось, фокусное расстояние линз 1 и 2, составленных вместе, $f_{12} < 0$; фокусное расстояние линз 2 и 3, также приложенных вплотную друг к другу, $f_{23} < 0$. Предполагая, что линзы тонкие, найти фокусные расстояния каждой из трех линз.

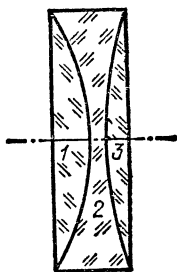


Рис. 4.26.

4.75. Две плосковыпуклые линзы, будучи сложены плоскими сторонами, образуют линзу с фокусным расстоянием f_1 . Найти фокусное расстояние f_2 линзы, которая получится, если сложить эти линзы выпуклыми сторонами, а пространство между ними заполнить водой. Показатели преломления стекла и воды равны $n = 1,66$ и $n_v = 1,33$.

4.76. Две плосковогнутые линзы, будучи сложены плоскими сторонами, образуют линзу с фокусным расстоянием f_1 . Найти фокусное расстояние f_2 линзы, которая получится, если сложить эти линзы вогнутыми сторонами, а пространство между ними заполнить водой. Показатели преломления стекла и воды равны $n = 1,66$ и $n_v = 1,33$.

4.77. Если линзу опустить в воду ($n_1 = 1,33$), то ее фокусное расстояние будет равно 1 м. Если ее опустить в сероуглерод ($n_2 = 1,6$), то ее фокусное расстояние возрастет до 10 м. Найти фокусное расстояние линзы в воздухе.

4.78. Плосковыпуклая толстая линза толщины $l = 5$ см с радиусом кривизны выпуклой части $R = 2,5$ см изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1,5$ (рис. 4.27). Где находятся фокусы такой линзы? Углы преломления считать малыми.

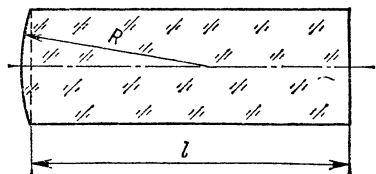


Рис. 4.27.

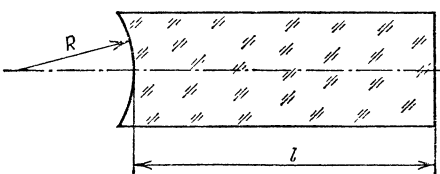


Рис. 4.28.

4.79. Плосковогнутая толстая линза толщины $l = 6$ см (рис. 4.28) с радиусом кривизны вогнутой части $R = 3$ см изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1,5$. На каком расстоянии от плоской поверхности находятся фокусы такой линзы? Углы преломления считать малыми.

Сферические зеркала

4.80. С помощью сферического зеркала получено изображение A_1B_1 предмета AB (рис. 4.29). Определить построением положение и фокус зеркала. Вогнутое или выпуклое это зеркало?

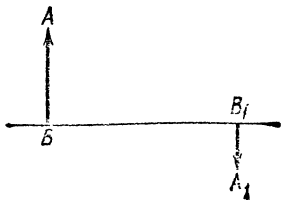


Рис. 4.29.

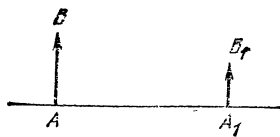


Рис. 4.30.

4.81. С помощью сферического зеркала получено изображение A_1B_1 предмета AB (рис. 4.30). Определить построением положение зеркала и его фокус.

4.82. Изображение S_1 точечного источника S получено с помощью вогнутого сферического зеркала, центр кривизны которого находится в точке O (рис. 4.31). Расстояния $SO = l$ и $SS_1 = L$ известны. Определить фокусное расстояние зеркала и выяснить, при каком соотношении между l и L задача имеет решение.

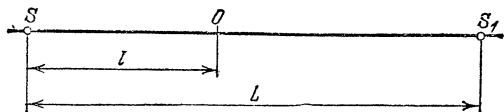


Рис. 4.31.

4.83. Для получения направленного пучка света в прожекторе в качестве отражателя используется вогнутое сферическое зеркало диаметра $D = 20$ см с фокусным расстоянием $f = 1$ м. На каком расстоянии a от зеркала нужно расположить точечный источник, чтобы лучи, отразившись от зеркала, образовали на стене светлое пятно диаметра $d = 40$ см? Расстояние от зеркала до стены $L = 12$ м.

4.84. В фокус сферического зеркала прожектора помещен источник света в виде светящегося диска радиуса $r = 1$ см. Найти диаметр освещенного пятна на стене на расстоянии $L = 500$ м от прожектора, если фокусное расстояние сферического зеркала $f = 4$ м, а диаметр зеркала $d = 1$ м.

4.85. Вогнутое сферическое зеркало дает действительное изображение, которое в три раза больше предмета. Определить фокусное расстояние зеркала, если расстояние между предметом и изображением $l = 20$ см.

4.86. Два одинаковых вогнутых сферических зеркала поставлены друг против друга на расстоянии, равном четырем фокусным расстояниям. В фокусе одного зеркала помещен источник света. Найти положение изображения источника.

4.87. Два одинаковых вогнутых сферических зеркала поставлены друг против друга так, что их главные фокусы совпадают. Светящаяся точка S помещена на общей оси на расстоянии a от первого зеркала. Где получится изображение после отражения лучей от обоих зеркал?

4.88. Сходящиеся лучи падают на вогнутое сферическое зеркало с радиусом кривизны $R = 60$ см так, что их продолжения пересекаются на оси системы в точке S на расстоянии $a = 15$ см за зеркалом. На каком расстоянии от зеркала сойдутся эти лучи после отражения? Будет ли точка их пересечения действительной?

4.89. Сходящиеся лучи падают на выпуклое сферическое зеркало с радиусом кривизны $R = 60$ см так, что их продолжения пересекаются на оси системы в точке S на расстоянии $a = 15$ см за зеркалом. На каком расстоянии от зеркала сойдутся эти лучи после

отражения? Будет ли точка их пересечения действительной? Решить ту же задачу для $R = 60$ см и $a = 40$ см.

4.90. Человек смотрит в вогнутое сферическое зеркало и видит прямое изображение своего глаза. Угловой размер этого изображения в $\gamma = 1,8$ раза больше углового размера изображения, которое получилось бы в плоском зеркале, помещенном на таком же расстоянии $a = 24$ см. Определить радиус кривизны зеркала R .

4.91. Расстояние между предметом и его действительным изображением, создаваемым сферическим зеркалом, $l_1 = 4$ см. Точно такое же изображение того же предмета получено с помощью тонкой собирающей линзы, имеющей то же фокусное расстояние, что и зеркало. Расстояние между предметом и изображением в этом случае оказалось равным $l_2 = 10$ см. Определить радиус кривизны зеркала.

4.92. С помощью системы концентрических зеркал на экране получено изображение Солнца (рис. 4.32). Каково должно быть фокусное расстояние тонкой линзы, чтобы с ее помощью получалось изображение Солнца такого же размера? Радиусы кривизны зеркал $R_1 = 12$ см и $R_2 = 30$ см.

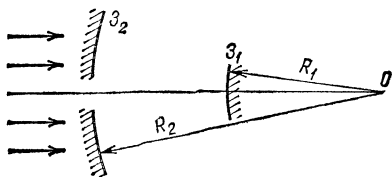


Рис. 4.32.

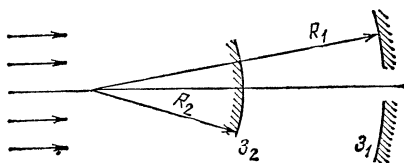


Рис. 4.33.

4.93. С помощью системы концентрических зеркал на фотопластинке получено изображение Луны (рис. 4.33). Каково должно быть фокусное расстояние тонкой линзы, чтобы с ее помощью получалось изображение Луны такого же размера? Радиусы кривизны зеркал $R_1 = 4$ см и $R_2 = 2,86$ см.

4.94. На дне цилиндрического сосуда диаметра $D = 5$ см, высоты $H = 50$ см лежит вогнутое сферическое зеркало с радиусом кривизны $R = 80$ см. Сосуд до половины заполнен водой ($n = 1,33$). Найти положение фокуса системы.

4.95. Плоская поверхность плосковогнутой линзы с фокусным расстоянием f покрыта хорошо отражающим слоем. На расстоянии a от линзы со стороны вогнутой поверхности расположен точечный источник света. Определить положение изображения источника. Можно ли в такой системе получить действительное изображение?

4.96. Свет от точечного источника, расположенного на оптической оси слева от линзы за ее фокусом, после прохождения линзы отражается от вогнутого сферического зеркала с радиусом кривизны R и, вторично пройдя через линзу, дает изображение. В каких точках оптической оси должно быть помещено зеркало для

того, чтобы изображение совпало с самим предметом? Как будет перемещаться изображение, если зеркало перемещать вдоль оптической оси между этими точками?

4.97. За тонкой собирающей линзой с фокусным расстоянием $f_n = 15$ см расположено выпуклое сферическое зеркало с фокусным расстоянием $f_s = 5$ см. Система дает прямое изображение предмета с увеличением $\beta = 1$ независимо от его удаления от линзы. Определить расстояние между линзой и зеркалом, если зеркало находится между линзой и ее фокусом.

4.98. За тонкой рассеивающей линзой с фокусным расстоянием $f_n = 5$ см на расстоянии $l = 7$ см расположено вогнутое сферическое зеркало. Система дает изображение предмета с увеличением $\beta = 1$ независимо от его удаления от линзы. Определить фокусное расстояние зеркала.

4.99. За тонкой собирающей линзой на некотором расстоянии расположено вогнутое сферическое зеркало. Система дает изображение предмета, находящегося на расстоянии $a = 10$ см перед линзой, с увеличением $\beta = 1$. Можно передвинуть зеркало и снова получить изображение предмета с тем же увеличением; при этом смещение зеркала не будет зависеть от радиуса кривизны зеркала. В нашем случае это смещение $l = 9$ см. Определить фокусное расстояние линзы, если зеркало все время находится за фокусом линзы.

4.100. На некотором расстоянии за тонкой рассеивающей линзой с фокусным расстоянием $f = 10$ см находится вогнутое сферическое зеркало. Система дает прямое изображение предмета с увеличением $\beta = 1$. Затем зеркало отодвинули от линзы на расстояние $l = 2$ см; при этом вновь получилось изображение предмета с увеличением $\beta = 1$. Определить расстояние между предметом и линзой.

4.101. К вогнутому сферическому зеркалу приложена вплотную небольшая собирающая линза, закрывающая центральную часть отражающей поверхности зеркала. Система дает два действительных изображения при одном и том же положении предмета перед зеркалом: одно изображение получается на расстоянии $b_1 = 50$ см, другое — на расстоянии $b_2 = 10$ см от зеркала. Найти фокусное расстояние линзы.

4.102. Радиус кривизны вогнутого сферического зеркала $R = 60$ см. Каково фокусное расстояние тонкой линзы, которую следует приставить вплотную к зеркалу, чтобы система давала прямое мнимое изображение предмета с увеличением $\beta = 1$?

4.103. Сферическое зеркало с фокусным расстоянием f дает перевернутое изображение предмета, находящегося от него на расстоянии a . Вплотную к зеркалу приставили тонкую линзу. Система при неизменном расстоянии до предмета дает его прямое изображение с тем же увеличением. Найти фокусное расстояние линзы.

4.104. Плоский предмет помещен на расстоянии $a = 60$ см перед выпуклым сферическим зеркалом, к которому вплотную при-

ставлена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 20$ см. Плоскость предмета перпендикулярна к оптической оси системы. Оказалось, что плоскость предмета совпадает с плоскостью изображения, образовавшегося после прохождения света через линзу, отражения и вторичного прохождения через линзу. Определить радиус кривизны выпуклого зеркала.

4.105. Сферическое зеркало лежит на горизонтальной поверхности. При этом изображение звезды, находящейся в зените, даваемое этим зеркалом, расположено на расстоянии a от зеркала. Зеркало до краев заполнили жидкостью, и после этого изображение звезды оказалось на расстоянии $0,7a$ от зеркала. Определить показатель преломления жидкости. Диаметр зеркала существенно меньше его радиуса кривизны.

4.106. Из стекла с показателем преломления $n = 1,5$ изготовлена линза с фокусным расстоянием $f = -10$ см. Затем на одну из сторон линзы наносят тонкий полупрозрачный слой серебра. С помощью такой линзы одновременно получают два одинаковых изображения предмета, причем размер изображений не зависит от того, какой стороной к предмету обращена линза. Определить радиус кривизны поверхностей линзы. Решить ту же задачу, если $f = 5$ см.

4.107. Одна из поверхностей тонкой линзы посеребрена. На расстоянии $a = 34$ см от линзы на ее оси расположен точечный источник света. Оказалось, что линза дает параллельный пучок лучей независимо от того, какой стороной она обращена к источнику. Определить фокусное расстояние линзы (до серебрения).

4.108. Одна из поверхностей тонкой линзы посеребрена. На расстоянии $a = 28$ см от линзы на ее оси расположен точечный источник света. Если линза обращена к источнику посеребренной стороной, то расстояние между источником и его мнимым изображением оказывается равным 56 см. Если линза повернута к источнику другой стороной, то она дает параллельный пучок лучей. Определить фокусное расстояние линзы (до серебрения).

4.109. На рис. 4.34 изображена система из двух сферических зеркал: вогнутого Z_1 (радиус кривизны $R_1 = 20$ м) и выпуклого Z_2 (радиус кривизны $R_2 = 10$ м), расположенных на расстоянии $L = 5$ м друг от друга. Система предназначена для временной задержки короткого светового импульса, падающего на зеркало Z_1 на расстоянии $h = 20$ см от оптической оси в виде тонкого луча, параллельного оси. Через какое время этот луч выйдет через отверстие диаметра $d = 2$ см, расположенное в центре выпуклого зеркала?

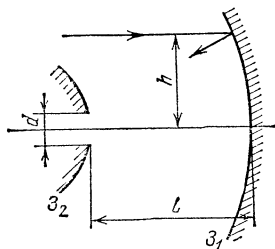


Рис. 4.34.

4.110. В оптической системе, предназначенной для задержки во времени короткого светового импульса, используется многократное отражение света от двух вогнутых сферических зеркал Z_1 (радиус

кривизны $R_1 = 10$ м) и \mathcal{Z}_2 (радиус кривизны $R_2 = 1$ м), расположенных на расстоянии $L = 5,5$ м друг от друга (рис. 4.35). В центре зеркала \mathcal{Z}_1 имеется отверстие диаметра $d = 2$ мм. На это зеркало на высоте $h = 15$ см от оси падает короткий световой импульс в виде тонкого луча, параллельного оси. Через какое время этот луч выйдет через отверстие?

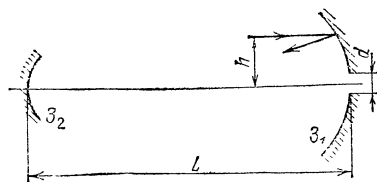


Рис. 4.35.

Оптические приборы

4.111. Демонстрация кинофильма происходит в зале длины $L = 20$ м. Экран имеет размеры $3,6 \times 4,8$ м². Определить фокусное расстояние объектива кинопроектора. Размеры кадра на киноплёнке: 18×24 мм².

4.112. Проекционный аппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние f_1 , установлен на расстоянии L от экрана. Во сколько раз изменится размер изображения, если на объектив надеть насадочную рассеивающую линзу с фокусным расстоянием f_2 ?

4.113. В проекционном аппарате используется объектив, состоящий из двух собирающих линз ($f_1 = 20$ см и $f_2 = 15$ см), расположенных на расстоянии $a = 5$ см друг от друга. С каким увеличением будет проецироваться диапозитив на экран, расположенный на расстоянии $L = 10$ м от объектива проектора? К диапозитиву обращена линза с фокусным расстоянием f_2 .

4.114. Телескоп астрофизической обсерватории имеет фокусное расстояние $f = 300$ м. Каков максимально допустимый угол качания главного зеркала, обусловленный сотрясениями фундамента обсерватории, чтобы была полностью использована разрешающая способность пленки, на которую ведется фотографирование астрономических объектов? Пленка расположена в фокальной плоскости зеркала телескопа. Ее разрешающая способность, определяемая зернистой структурой фотоэмульсии, $d = 20$ мкм.

4.115. Определить главное фокусное расстояние и оптическую силу очков, восполняющих недостаток дальновзорного глаза, для которого расстояние наилучшего зрения $d_1 = 50$ см.

4.116. Близорукий человек может читать мелкий шрифт на расстоянии не более $d_1 = 20$ см от глаз. Чему равны оптическая сила и фокусное расстояние очков, восполняющих недостаток такого близорукого глаза?

4.117. Пределы аккомодации у близорукого человека лежат между $d_1 = 10$ и $d_2 = 25$ см. Как изменятся эти пределы, если человек наденет очки с оптической силой $D = -4$ дптр?

4.118. Близорукий человек без очков рассматривает предмет, находящийся на некотором расстоянии под поверхностью воды. Оказалось, что если глаз расположен вблизи поверхности воды,

максимальное погружение предмета, при котором человек еще различает его мелкие детали, $d = 30$ см. Какие очки следует носить этому человеку? Показатель преломления воды $n = 1,3$.

4.119. При рассматривании своего лица человеку удобно располагать плоское зеркало на расстоянии $l = 25$ см от лица. Какие очки вы порекомендуете этому человеку для чтения текста?

4.120. Человек для чтения текста надевает очки с оптической силой $D = -4$ дптр. На каком расстоянии l ему удобно располагать плоское зеркало при рассматривании своего лица без очков?

4.121. Фотоаппарат сфокусирован на бесконечность. На каком расстоянии предметы на снимке будут получаться достаточно резкими? Изображение считать резким, если размытие его деталей не превышает $d = 0,1$ мм. Фокусное расстояние объектива $f = 50$ мм, отношение диаметра объектива к его фокусному расстоянию равно $1/2$.

4.122. Бегун был сфотографирован с расстояния $a = 10$ м фотоаппаратом, имеющим объектив с фокусным расстоянием $f = 50$ мм. Размытие деталей изображения на пленке оказалось равным $d = 1$ мм. Время экспозиции $\tau = 1/50$ с. Определить скорость бегуна.

4.123. Какое время может быть открыт затвор фотоаппарата при съемке прыжка в воду с вышки? Фотографируется момент погружения в воду. Высота вышки $H = 5$ м. Фотограф стоит в лодке на расстоянии $a = 10$ м от места погружения прыгуна. Объектив фотоаппарата имеет фокусное расстояние $f = 10$ см. На негативе допустимо размытие изображения $d = 0,5$ мм.

4.124. При аэрофотосъемках используется фотоаппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние $f = 8$ см. Минимальный размер различных деталей изображения на фотопленке (разрешающая способность пленки) $d = 10$ мкм. На какой высоте должен лететь самолет, чтобы на фотографии можно было различить листья деревьев размера $l = 5$ см? При какой скорости самолета изображение оказывается различным, если время экспозиции $\tau = 10^{-3}$ с?

4.125. На спутнике, летящем по круговой орбите на высоте $H = 100$ км, расположен фотоаппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние $f = 10$ см. Фотографируется поверхность Земли под спутником. Разрешающая способность пленки, определяемая зернистой структурой фотоэмульсии, $d = 10$ мкм. Каков минимальный размер фотографируемых предметов? Какое следует выбрать время экспозиции τ , чтобы орбитальное движение спутника не влияло на качество изображения?

4.126. При аэрофотосъемке местности был применен фотоаппарат с объективом, состоящим из собирающей ($f_1 = 10$ см) и рассеивающей ($f_2 = -15$ см) линз, расположенных на расстоянии $a = 5$ см друг от друга. Какой участок местности можно сфотографировать с помощью такого объектива с высоты $H = 750$ м на фотопленку с размером кадра $2,4 \times 3,6$ см²? К фотопленке обращена рассеивающая линза.

4.127. Газетный текст фотографируется аппаратом «Зенит» с объективом, имеющим фокусное расстояние $f = 50$ мм, дважды: а) с наименьшего допустимого для этого объектива расстояния $a = 0,5$ м; б) присоединив объектив к камере через удлинительное кольцо высоты $h = 25$ мм (также с минимально возможным в этом случае расстояния). Найти отношение размеров изображений, полученных на фотопленке в этих случаях.

4.128. При фотографировании удаленного точечного источника на фотографии из-за невысокого качества объектива и применяемого фотоматериала получается светлый кружок диаметра $d = 0,1$ мм. С какого максимального расстояния можно сфотографировать в тех же условиях два точечных источника, расположенных на расстоянии $l = 1$ см друг от друга, чтобы на фотографии их изображения еще не перекрывались? Фокусное расстояние объектива $f = 5$ см.

4.129. На фотопленке после проявления из-за конечной разрешающей способности пленки получают достаточно резко не только те предметы (находящиеся на расстоянии a_0), на которые наведен объектив фотоаппарата, но также предметы, находящиеся несколько ближе и несколько дальше этого расстояния, т. е. резко изображаются предметы, лежащие внутри некоторой области $a_1 - a_2$ ($a_1 < a_0 < a_2$; a_1 — ближняя граница глубины резкости, a_2 — дальняя). При фотографировании некоторого объекта резко получились предметы, находящиеся от фотоаппарата на расстояниях от $a_1 = 7,5$ до $a_2 = 15$ м. На каком расстоянии находится фотографируемый объект?



Рис. 4.36.

4.130. Из-за конечной разрешающей способности фотопленки при фотографировании резко получаются предметы, находящиеся от фотоаппарата на расстояниях от $a_1 = 15$ м до $a_2 = 30$ м. Не меняя наводки фотоаппарата, объектив задиафрагмировали (т. е. уменьшили диаметр открытой части линзы объектива). При этом ближняя граница глубины резкости стала равной $a_1 = 10$ м. Найти дальнюю границу глубины резкости.

4.131. Используя фотографию, сделанную для рекламного плаката (рис. 4.36), определить: а) фокусное расстояние объектива фотоаппарата; б) на каком расстоянии a от ладоней рук располагался объектив при фотографировании; в) размер рыбы, пойманной рыбаком; г) диаметр объектива. Размытие деталей изображения на фотографии не превосходит $d = 0,2$ мм. Объектив фотоаппарата рассматривать как тонкую линзу. Фотография отпечатана с фотопластины без увеличения.

4.132. В микроскопе фокусное расстояние объектива $f_1 = 5,4$ мм, а окуляра $f_2 = 2$ см. Предмет находится от объектива на расстоянии $a_1 = 5,6$ мм. Определить увеличение микроскопа для нормального глаза и длину микроскопа (расстояние между объективом и окуляром). Глаз аккомодирован на расстояние наилучшего зрения $d = 25$ см.

4.133. Объектив зрительной трубы имеет фокусное расстояние $f_1 = 30$ см, а окуляр — $f_2 = 4$ см. Труба установлена на бесконечность *). В каком месте нужно поставить диафрагму, чтобы поле зрения было резко ограничено? Каков угол поля зрения, если диаметр диафрагмы $D = 12$ мм? Каково угловое увеличение трубы?

4.134. Зрительная труба с фокусным расстоянием объектива $f = 50$ см установлена на бесконечность. На какое расстояние надо передвинуть окуляр трубы, чтобы ясно видеть предметы на расстоянии $a = 50$ м?

4.135. Перед объективом зрительной трубы Кеплера (с собирающей линзой в качестве окуляра) помещен предмет на расстоянии $a < f_1$. Отношение фокусных расстояний объектива и окуляра $f_1/f_2 = 10$. Труба наведена на бесконечность. Найти линейное увеличение трубы β . Определить характер изображения.

4.136. Перед объективом зрительной трубы Галилея (с рассеивающей линзой в качестве окуляра) помещен предмет на расстоянии $a > f_1$. Отношение фокусных расстояний объектива и окуляра $f_1/f_2 = -10$. Труба установлена на бесконечность. Найти линейное увеличение трубы β . Определить характер изображения.

4.137. Наблюдатель рассматривает удаленный предмет с помощью зрительной трубы Кеплера. В качестве объектива и окуляра трубы используются линзы с фокусными расстояниями $f_1 = 30$ см и $f_2 = 5$ см. Наблюдатель видит четкое изображение предмета, если

*) В данной и ряде последующих задач не содержится указаний относительно аккомодации глаза наблюдателя. В подобных случаях рекомендуется решать задачу в предположении, что глаз аккомодирован на бесконечность (см. примечание к решению данной задачи).

расстояние между объективом и окуляром трубы находится в пределах от $L_1 = 33$ см до $L_2 = 34,5$ см. На каких расстояниях наблюдатель отчетливо видит предмет невооруженным глазом?

4.138. Человек с нормальным зрением рассматривает удаленный предмет с помощью зрительной трубы Галилея. В качестве объектива и окуляра используются линзы с фокусными расстояниями $f_1 = 40$ см и $f_2 = -2$ см. При каких расстояниях между объективом и окуляром наблюдатель увидит четкое изображение предмета, если глаз может аккомодироваться от 10 см до бесконечности?

4.139. Объектив и окуляр зрительной трубы Галилея имеют фокусные расстояния $f_1 = 57$ см и $f_2 = -4$ см. Труба наведена на Солнце. На расстоянии $b = 12$ см от окуляра расположен белый экран. При каком расстоянии L между объективом и окуляром на экране получится четкое изображение Солнца? Каков будет диаметр D этого изображения, если угловой размер Солнца $\alpha = 30'$? Решить ту же задачу, когда использована зрительная труба Кеплера с фокусными расстояниями объектива и окуляра $f_1 = 40$ см, $f_2 = 3$ см, а экран расположен на расстоянии $b = 15$ см от окуляра.

4.140. Объективом театрального бинокля служит собирающая линза с фокусным расстоянием $f_1 = 8$ см, окуляром — рассеивающая линза с фокусным расстоянием $f_2 = -4$ см. Чему равно расстояние между объективом и окуляром, если изображение рассматривается глазом с расстояния наилучшего зрения? Насколько нужно переместить окуляр для того, чтобы изображение можно было рассматривать глазом, аккомодированным на бесконечность?

4.141. Два зрителя — близорукий и дальнорезкий — смотрят по очереди на сцену в один и тот же театральный бинокль. Которому из них приходится сильнее раздвигать трубку бинокля, если в обоих случаях изображение рассматривается с расстояния наилучшего зрения? Подсчитать изменение длины трубки бинокля при передаче его одним зрителем другому, если фокусное расстояние окуляра (рассеивающей линзы) $f_2 = -4$ см, а расстояния наилучшего зрения близорукого и дальнорезкого зрителей равны $d_1 = 20$ см и $d_2 = 50$ см.

Фотометрия

4.142. Определить силу света лампы уличного освещения, необходимую для того, чтобы освещенность на земле посередине между фонарями была равна $E = 0,2$ лк. Лампы подвешены на высоте $h = 10$ м, расстояние между столбами $l = 40$ м. При расчете учитывать освещенность, даваемую двумя соседними фонарями.

4.143. Точечный источник света помещен на некотором расстоянии L от экрана и дает в центре экрана освещенность $E = 1$ лк. Как изменится освещенность, если по другую сторону от источника на том же расстоянии поместить плоское идеально отражающее зеркало? Плоскости экрана и зеркала параллельны.

4.144. На расстоянии $L = 1$ м от экрана находится матовая лампочка. С помощью линзы, перемещая последнюю, дважды полу-

чают на экране четкое изображение лампочки. Освещенности изображений при этом отличаются в 9 раз. Определить фокусное расстояние линзы.

4.145. С помощью тонкой линзы на экране получено изображение протяженного источника света с линейным увеличением $\beta_1 = 2$. Затем экран был передвинут в другое положение, и на нем вновь было получено с помощью той же линзы изображение источника с линейным увеличением $\beta_2 = 5$. Определить отношение освещенностей изображений в этих случаях.

4.146. На расстоянии $L = 1$ м от небольшого экрана расположен точечный источник света. Посередине между источником и экраном поместили линзу. Оказалось, что освещенность экрана не изменилась. Определить фокусное расстояние линзы.

4.147. На расстоянии $L = 5$ м от экрана расположен светящийся диск диаметра $d = 1$ см. Между источником света и экраном поместили собирающую линзу диаметра $D = 2$ см и с ее помощью получили на экране изображение диска. Оказалось, что освещенность изображения равна освещенности линзы. Определить фокусное расстояние линзы.

4.148. Собирающая линза с фокусным расстоянием $f_1 = 6$ см расположена на расстоянии $L = 4 f_1 = 24$ см от экрана (рис. 4.37).

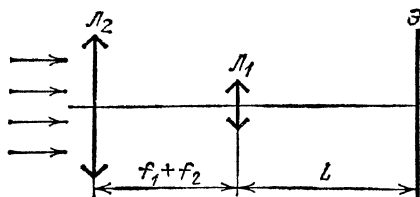


Рис. 4.37.

На линзу вдоль оптической оси падает параллельный пучок света. Во сколько раз изменится освещенность в центре экрана, если на пути лучей поставить еще одну собирающую линзу с фокусным расстоянием $f_2 = 12$ см, так что расстояние между линзами равно сумме их фокусных расстояний?

4.149. Рассеивающая линза с фокусным расстоянием $f_1 = -10$ см расположена на расстоянии $L = 10$ см от экрана. На линзу вдоль оптической оси падает параллельный пучок света. Во сколько раз изменится освещенность в центре экрана, если на

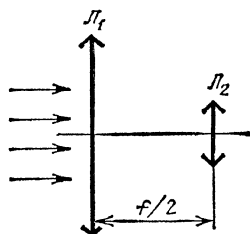


Рис. 4.38.

пути пучка поставить собирающую линзу с фокусным расстоянием $f_2 = 20$ см, так что расстояние между линзами будет равно $L = 10$ см?

4.150. Две собирающие линзы с одинаковыми фокусными расстояниями f расположены на расстоянии $f/2$ друг от друга (рис. 4.38). С помощью этой системы получены два изображения Солнца: одно образовано лучами, которые после преломления в линзе L_1 миновали линзу L_2 ,

другое — лучами, прошедшими последовательно через обе линзы. При каком отношении диаметров линз освещенности изображения будут одинаковы?

4.151. На расстоянии $2f$ от собирающей линзы L_1 с фокусным расстоянием f находится светящийся предмет S . Освещенность четкого изображения предмета на экране при этом равна E_0 . Между экраном и линзой L_1 поместили рассеивающую линзу L_2 с фокусным расстоянием $-2f$. Для получения четкого изображения экран пришлось передвинуть на расстояние, равное фокусному расстоянию линзы f . Определить освещенность изображения во втором случае.

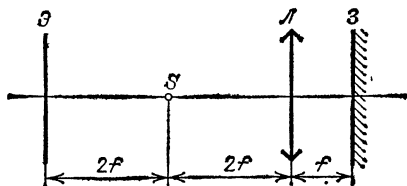


Рис. 4.39.

4.152. На оптической скамье последовательно расположены экран, точечный источник света S , собирающая линза и плоское зеркало (рис. 4.39). Во сколько раз изменится освещенность

в центре экрана, если плоское зеркало передвинуть вправо на расстояние, равное фокусному расстоянию линзы f ?

4.153. Собирающая линза диаметра $d = 2$ см с фокусным расстоянием $f = 20$ см освещается широким параллельным пучком света. Идеальное плоское зеркало расположено за линзой так, что 25 % светового потока, прошедшего через линзу и отразившегося от зеркала, снова попадает на линзу. Найти расстояние между линзой и зеркалом.

4.154. На рассеивающую линзу диаметра $d = 2$ см с фокусным расстоянием $f = 20$ см падает широкий параллельный пучок света. За линзой на расстоянии $l = 15$ см стоит плоское идеальное зеркало. Какая часть светового потока, прошедшего через линзу, снова упадет на нее после отражения от зеркала?

4.155. В главном фокусе вогнутого зеркала с радиусом кривизны $R = 2$ м находится точечный источник света. На расстоянии $L = 10$ м от источника помещен экран, перпендикулярный к главной оптической оси зеркала. Во сколько раз освещенность в центре светового пятна, получающегося на экране, больше, чем освещенность в том же месте экрана, создаваемая источником при отсутствии зеркала? Потери света в воздухе и при отражении пренебречь.

4.156. Чем легче поджечь кусок дерева: вогнутым зеркалом с диаметром оправы $D = 1$ м и радиусом кривизны $R = 10$ м или линзой с диаметром $d = 2$ см и фокусным расстоянием $f_1 = 4$ см? Источником света служит Солнце.

4.157. Правдоподобна ли легенда о том, что греческие воины по совету Архимеда сожгли деревянный корабль римлян, направив на него солнечные лучи, отраженные от плоских щитов? Сколько для этого понадобилось бы воинов? Известно, что в солнечную погоду удастся зажечь кусок сухого дерева при помощи линзы диаметра $d = 3$ см с фокусным расстоянием $f = 0,1$ м. Угловой размер Солнца $\alpha = 0,01$ рад. Диаметр щита $D = 1$ м, расстояние до корабля $L = 20$ м.

4.158. На расстоянии L от небольшого экрана находится точечный источник света S . Между экраном и источником поместили

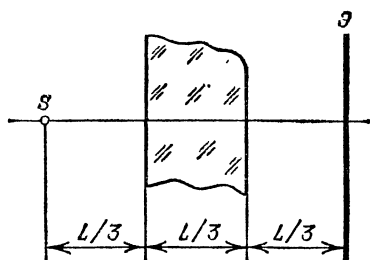


Рис. 4.40.

плоскопараллельную стеклянную пластинку толщины $L/3$ (расположение показано на рис. 4.40). Оказалось, что освещенность экрана не изменилась. Какая часть световой энергии теряется при прохождении пластинки? Показатель преломления стекла $n = 1,5$.

4.159. На расстоянии L от небольшого экрана находится точечный источник света. Между источником и экраном поместили

собирающую линзу так, что источник расположен в фокусе линзы. Оказалось, что освещенность экрана не изменилась. Какая часть световой энергии теряется при прохождении линзы? Фокусное расстояние линзы $f = 2L/3$.

4.160. Энергия солнечных лучей, падающих на поверхность Луны, частично поглощается (коэффициент поглощения $\alpha = 90\%$) и частично рассеивается. Во сколько раз освещенность поверхности Земли во время полнолуния меньше освещенности, создаваемой прямыми солнечными лучами? Угловой диаметр Луны, видимый с Земли, $\varphi = 10^{-2}$ рад. Считать, что освещенная поверхность Луны рассеивает свет равномерно в телесный угол 2π .

4.161. Луна в полнолуние создает на Земле освещенность $E = 0,1$ лк (на площадке, перпендикулярной лучам). При фотографировании лунного диска фотопленку с чувствительностью $H = 1$ лк·с расположили в фокальной плоскости объектива астрономического телескопа. Качественная фотография была получена при времени экспозиции $\tau = 0,1$ с. Определить светосилу объектива (т. е. квадрат отношения диаметра к фокусному расстоянию). Угловой размер Луны $\alpha = 0,01$ рад.

4.162. Аппарат для фотографирования Солнца имеет объектив с фокусным расстоянием $f = 10$ м. Перед объективом расположена круглая диафрагма диаметра $D = 5$ см. Применяемая фотопленка имеет чувствительность $H = 10$ лк·с. Каким должно быть при этих условиях время экспозиции τ ? Известно, что прямые солнечные лучи создают на перпендикулярной к ним площадке освещенность $E = 4 \cdot 10^4$ лк. Угловой диаметр Солнца $\alpha = 0,01$ рад.

4.163. С помощью зрительной трубы, состоящей из объектива диаметра $d_1 = 10$ см с фокусным расстоянием $f_1 = 50$ см и окуляра диаметра $d_2 = 0,5$ см с фокусным расстоянием $f_2 = 2,5$ см получено изображение Солнца на экране, расположенном на расстоянии $b = 20$ см за окуляром. Во сколько раз освещенность изображения больше освещенности экрана прямыми солнечными лучами? Угловой диаметр Солнца $\alpha = 0,01$ рад. Потерями света в оптической системе пренебречь.

4.164. Изображение Солнца получено с помощью объектива, состоящего из собирающей и рассеивающей линз ($f_1 = 10$ см, $f_2 = -10$ см), расположенных на расстоянии $l = 5$ см. Посередине

между линзами помещена круглая диафрагма диаметра $D = 0,75$ см. Линзы имеют достаточно большие размеры и не ограничивают световых пучков. Во сколько раз освещенность изображения больше освещенности экрана прямыми солнечными лучами? Угловой диаметр Солнца $\alpha = 0,01$ рад. Потерями света в линзах пренебречь.

4.165. Объективом трубы Кеплера служит линза диаметра $D = 7,5$ см с фокусным расстоянием $f_1 = 50$ см. Каково фокусное расстояние окуляра, если при наблюдении с помощью этой трубы Луна кажется в четыре раза менее яркой по сравнению с наблюдением невооруженным глазом? Диаметр зрачка $d_{зр} = 0,3$ см.

4.166. Во сколько раз изменится освещенность изображения Луны на сетчатке глаза при наблюдении с помощью трубы Кеплера, если уменьшить диаметр объектива в три раза (диафрагмирование)? Первоначальный диаметр объектива $D = 15$ см, увеличение $\gamma = 25$. Диаметр зрачка глаза $d_{зр} = 0,3$ см.

4.167. В школьном физическом кружке была собрана труба Кеплера (рис. 4.41) с угловым увеличением $\gamma = 10$. Диаметр объектива $D = 6$ см. С какого максимального расстояния можно увидеть свет зажженной спички с помощью этой трубы, если невооруженным глазом это можно сделать с расстояния $L = 1$ км? Диаметр зрачка $d_{зр} = 0,3$ см. Потерями света пренебречь.

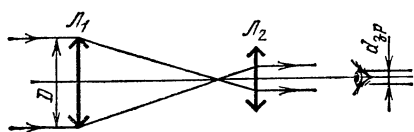


Рис. 4.41.

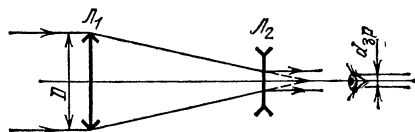


Рис. 4.42.

4.168. Диаметр объектива трубы Галилея $D = 6$ см (рис. 4.42). Угловое увеличение трубы $\gamma = 60$. С какого максимального расстояния можно увидеть свет зажженной спички с помощью этой трубы, если невооруженным глазом это можно сделать с расстояния $L = 1$ км? Диаметр зрачка $d_{зр} = 0,3$ см. Потерями света пренебречь.

4.169. Яркая кратковременная вспышка в воздухе производит на наблюдателя, находящегося от нее на расстоянии 1 км, эффект, близкий к временной потере зрения. В этих же погодных условиях вспышка со световым излучением, в 100 раз более сильным, производит такой же эффект на наблюдателя, находящегося от нее на расстоянии 5 км. Какой должна быть вспышка, чтобы она произвела такой же эффект на наблюдателя, находящегося от нее на расстоянии 9 км?

4.170. В системе оптической связи передающий луч имеет вид конуса с углом при вершине $\alpha = 10^{-4}$ рад (угол расходимости пучка). В приемном устройстве световая энергия фокусируется с помощью линзы

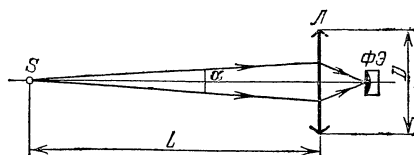


Рис. 4.43.

диаметра $D = 1$ м на фотоэлемент (рис. 4.43). Оказалось, что при изменении расстояния L между передатчиком и приемником от 5 до 10 км сигнал на выходе фотоэлемента из-за поглощения света в атмосфере уменьшился в два раза. Во сколько раз изменится сигнал при изменении расстояния L от 10 до 20 км?

4.171. Монохроматическое инфракрасное излучение при распространении в атмосфере поглощается парами воды, так что при нормальном давлении и температуре $t = 20^\circ\text{C}$ энергия излучения падает в пять раз на горизонтальном участке длины $L = 4,35$ км. Как поглощается это излучение при прохождении всей атмосферы Земли по вертикали? Средняя молярная масса воздуха (с учетом водяного пара) $\mu = 28,7$ г/моль. Отношение давления паров воды к общему давлению считать постоянным по всей высоте атмосферы.

4.172. Известно, что инфракрасное излучение определенной длины волны сильно поглощается метаном (CH_4). При нормальных условиях слой чистого метана толщины $d = 1$ см поглощает $\alpha = 98\%$ энергии излучения. Во сколько раз ослабится такое излучение при прохождении атмосферы Земли по вертикали? При расчете относительное содержание метана в атмосфере (по массе) принять равным $\beta = 1,4 \cdot 10^{-6}$.

4.173. Направленный пучок инфракрасного излучения ослабляется из-за рассеяния на каплях тумана. Радиус капель $r_1 = 5$ мкм, масса воды в единице объема воздуха $\gamma_1 = 0,002$ г/м³. На каком расстоянии в таком тумане пучок ослабится так же, как на расстоянии $l_0 = 1$ км в тумане из капель радиуса $r_0 = 20$ мкм при $\gamma_0 = 0,02$ г/м³?

4.174. В дымовой завесе из непрозрачных частиц радиуса $r_1 = 5$ мкм при массе вещества в единице объема воздуха $\gamma_1 = 0,04$ г/м³ дальность видимости составляет $l_1 = 50$ м. Сколько вещества в единице объема воздуха распыляется источником завесы из частиц радиуса $r_2 = 10$ мкм, если видимость сокращается до $l_2 = 20$ м?

4.175. При падении света на плоскопараллельную стеклянную пластинку коэффициент отражения (отношение световых энергий в отраженном и падающем лучах) равен R . Выразить R через коэффициенты отражения света от границ воздух — стекло и стекло — воздух, предполагая их одинаковыми и равными ρ . При решении учесть многократные отражения света в плоскопараллельной пластинке. Поглощением света в пластинке пренебречь. Угол падения лучей на пластинку φ считать малым.

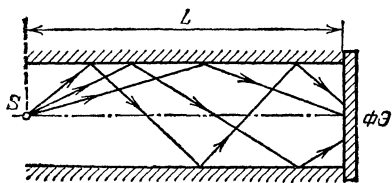


Рис. 4.44.

4.176. На оси длинной тонкой трубки радиуса $r = 1$ см с зеркально отражающими внутренними стенками расположен точечный источник S (рис. 4.44), сила света которого $I = 10$ кд. У торца трубки на расстоянии

$L = 1$ м от источника расположен фотоэлемент. Лучи от источника могут достигать светочувствительной поверхности как без отражения на стенках трубки, так и после нескольких отражений. Найти световой поток, попадающий на фотоэлемент после трехкратного отражения на стенках.

4.177. Параллельный пучок света, проходящий через стеклянную плоскопараллельную пластинку толщины H с показателем преломления n , направляется линзой на катод фотоэлемента. Фокусное расстояние линзы f значительно больше ее диаметра D . Взаимное расположение линзы и фотоэлемента таково, что катод диаметра d в точности перекрывает световой поток. При этом гальванометр в цепи фотоэлемента показывает ток I . Какой ток покажет гальванометр, если поставить пластинку между линзой и фотоэлементом, не меняя положения последних?

4.178. Небольшой черный шарик, поглощающий все световые лучи, при освещении Солнцем нагревается до температуры t_1 . До какой температуры t_2 нагреется шарик, если сфокусировать на нем изображение Солнца с помощью линзы диаметра D с фокусным расстоянием f ? Энергия, теряемая шариком в единицу времени за счет теплообмена, пропорциональна площади его поверхности и разности температур шарика и окружающего воздуха. Температура воздуха равна t_0 . Рассмотреть случай, когда диаметр шарика меньше диаметра изображения Солнца. Угловой диаметр Солнца равен α .

4.179. Экран освещается прямыми солнечными лучами. Как изменится освещенность экрана, если между ним и Солнцем на расстоянии $l = 1$ м от экрана поместить матовый стеклянный шарик диаметра $d = 5$ см, равномерно рассеивающий во все стороны падающий на него свет?

4.180. На некотором расстоянии a справа от равномерно светящейся плоскости A расположен экран с круглым отверстием диаметра d (рис. 4.45). На таком же расстоянии a справа от экрана расположено матовое стекло B . Найти освещенность центрального участка матового стекла (в точке O), если известно, что светящаяся плоскость излучает за единицу времени с единицы поверхности в единицу телесного угла световой поток Φ . Считать, что $d \ll a$.

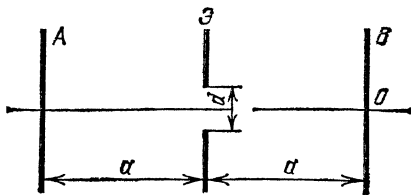


Рис. 4.45.

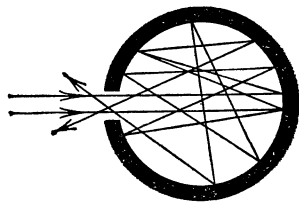


Рис. 4.46.

4.181. Тепловой фотоприемник представляет собой полую камеру с площадью внутренней поверхности $S = 2$ см², имеющую небольшое отверстие площади $\sigma = 1$ мм² (рис. 4.46). Внутренняя поверхность камеры незначительную часть света поглощает (коэф-

коэффициент поглощения $\alpha = 0,01$), а остальную часть рассеивает. В этих условиях внутри полости создается равномерно распределенное по всем направлениям излучение. Какая часть светового потока, попадающего на входное отверстие камеры, выходит через него обратно?

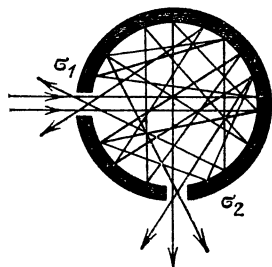


Рис. 4.47.

4.182. Световой поток через небольшое отверстие попадает внутрь полости, имеющей площадь поверхности $S = 5 \text{ см}^2$ (рис. 4.47). Стенки полости небольшую часть света поглощают, а остальную рассеивают. В этих условиях внутри полости создается равномерно распределенное по всем направлениям излучение. Из второго отверстия (сечения отверстий $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 2 \text{ мм}^2$) выходит $n = 1/5$ светового

потока, попадающего на входное отверстие. Определить коэффициент поглощения стенок полости.

Элементы волновой оптики

4.183. На рис. 4.48 изображена схема опыта Френеля по наблюдению интерференции. Два одинаковых плоских зеркала образуют между собой угол $\pi - 2\alpha$ ($2\alpha = 0,1 \text{ рад}$). Точечный источник света S находится на биссектрисе угла на расстоянии $d = 20 \text{ см}$ от линии пересечения зеркал. При каком минимальном размере зеркал a на удаленном экране могут наблюдаться интерференционные полосы? Прямые лучи от источника на экран не попадают.

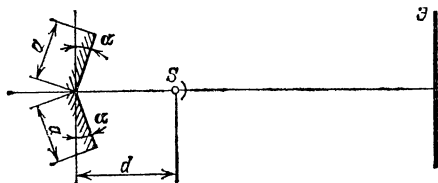


Рис. 4.48.

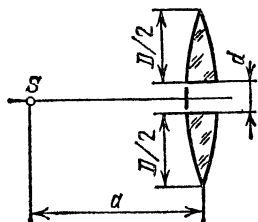


Рис. 4.49.

4.184. Собирающую линзу диаметра $D = 5 \text{ см}$ с фокусным расстоянием $f = 50 \text{ см}$ разрезали по диаметру пополам и половинки раздвинули на расстояние $d = 5 \text{ мм}$ (рис. 4.49). Точечный источник света S расположен на расстоянии $a = 1 \text{ м}$ от линзы. На каком расстоянии от линзы можно наблюдать интерференционную картину? Щель между половинками линзы закрыта.

4.185. Из собирающей линзы диаметра $D = 5 \text{ см}$ с фокусным расстоянием $f = 50 \text{ см}$ вырезана полоса ширины $d = 5 \text{ мм}$, а оставшиеся части сдвинуты вплотную (рис. 4.50). Точечный источник света S расположен на расстоянии $a = 75 \text{ см}$ от линзы. На каком расстоянии от линзы можно наблюдать интерференционную картину?

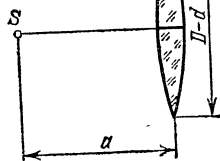
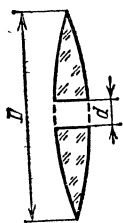


Рис. 4.50.

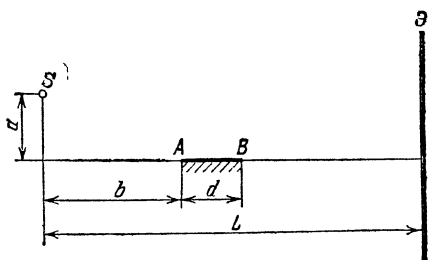


Рис. 4.51.

4.186. На рис. 4.51 изображена схема интерференционного опыта Ллойда. Точечный источник света S расположен на расстоянии $b = 20$ см от левого края плоского зеркала AB на высоте $a = 10$ см над плоскостью зеркала. Длина зеркала $d = 10$ см. Определить вертикальный размер интерференционной картины на экране, расположенном на расстоянии $L = 1$ м от источника.

4.187. Два точечных монохроматических источника света S_1 и S_2 расположены на расстоянии l друг от друга. На расстоянии $H = 8$ м от источника S_1 наблюдается интерференция (рис. 4.52). Источник S_2 отодвигают от источника S_1 . Первый раз потемнение в точке A наблюдается при расстоянии между источниками $l_1 = 2$ мм. В следующий раз потемнение наступает при расстоянии l_2 . Найти это расстояние. При $x \ll 1$ считать $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$.

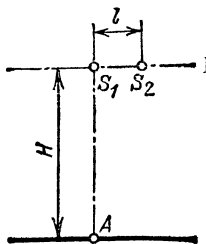


Рис. 4.52.

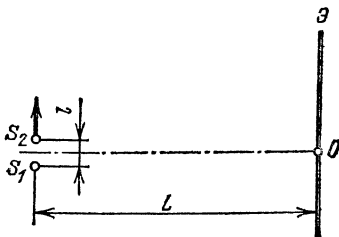


Рис. 4.53.

4.188. От точечного монохроматического источника S_1 отодвигают точечный монохроматический источник S_2 (свет обоих источников имеет одну и ту же частоту) до тех пор, пока в точке O на экране, где наблюдается интерференция, не наступает потемнение. Расстояние между источниками S_1 и S_2 при этом равно $l = 2$ мм (рис. 4.53). Расстояние между источником S_1 и экраном $L = 9$ м. На сколько нужно передвинуть экран к источнику S_1 , чтобы в точке O снова возникло потемнение? При $x \ll 1$ считать $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$.

4.189. Точечный источник света S равномерно движется параллельно плоскости, в которой имеется два маленьких отверстия на расстоянии d друг от друга. Расстояние от него до плоскости равно h (рис. 4.54). Приемник света A , расположенный на оси системы,

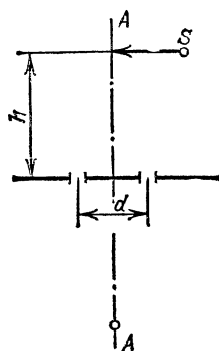


Рис. 4.54.

регистрирует периодически изменяющуюся интенсивность света. Определить скорость движения источника v , если частота колебаний интенсивности $f = 15$ Гц, длина волны света $\lambda = 600$ нм, $d = 2$ мм, $h = 1$ м. Во время измерения источник движется вблизи оси системы AA' .

4.190. Приемник радиосигналов, следящий за появлением спутника Земли из-за горизонта, расположен на берегу озера на высоте $H = 3$ м над поверхностью воды. По мере поднятия спутника над горизонтом наблюдаются периодические изменения интенсивности принимаемого радиосигнала. Определить частоту радиосигнала спутника, если максимумы интенсивности

появлялись при углах возвышения спутника над горизонтом $\alpha_1 = 3^\circ$, $\alpha_2 = 6^\circ$. Поверхность озера считать идеально отражающим зеркалом.

4.191. Радиоизлучение от звезды, расположенной в плоскости экватора, принимается с помощью двух антенн, расположенных на экваторе на расстоянии $L = 200$ м друг от друга. Сигналы с антенн подаются по кабелям одинаковой длины на приемник. Найти закон изменения амплитуды напряжения на входном контуре приемника в результате вращения Земли. Прием ведется на длине волны $\lambda = 1$ м. Звезда мало отклоняется от зенита за время наблюдения.

4.192. Коротковолновый передатчик работает на частоте $f = 30$ МГц. Приемник находится на расстоянии $L = 2000$ км от него. Радиоволны достигают приемника, отражаясь от ионосферных слоев, расположенных на высотах $h_1 = 100$ км и $h_2 = 300$ км. Найти закон изменения интенсивности сигнала, если приемник перемещать вдоль прямой, соединяющей его с передатчиком. Перемещение мало по сравнению с L .

4.193. Импульсное излучение рубинового лазера на длине волны $\lambda = 690$ нм направляется на лунную поверхность с помощью телескопа с диаметром зеркала $D = 2,6$ м. На Луне установлен отражатель, который работает как идеальное зеркало диаметра $d = 20$ см, отражающее свет точно в обратном направлении. Отраженный свет улавливается тем же телескопом и фокусируется на фотоприемник.

а) С какой точностью должна быть установлена оптическая ось телескопа в этом эксперименте?

б) Пренебрегая потерями света в атмосфере Земли и в телескопе, оценить, какая доля световой энергии лазера будет после отражения от Луны зарегистрирована фотоприемником.

в) Можно ли отраженный световой импульс зарегистрировать невооруженным глазом, если пороговую чувствительность глаза принять равной $n = 100$ световых квантов, а энергия, излучаемая лазером в течение импульса, $E = 1$ Дж?

г) Оценить выигрыш, который дает применение отражателя. Считать, что поверхность Луны рассеивает $\alpha = 10\%$ падающего света равномерно в телесный угол 2π . Расстояние от Земли до Луны $L = 380$ тыс. км. Диаметр зрачка глаза $d_{\text{зр}} = 0,5$ см. Постоянная Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Элементы квантовой оптики. Фотоэффект *)

4.194. Мощность точечного источника монохроматического света $P_0 = 10$ Вт на длине волны $\lambda = 500$ нм. На каком максимальном расстоянии этот источник будет замечен человеком, если глаз реагирует на световой поток 60 фотонов в секунду? Диаметр зрачка $d_{\text{зр}} = 0,5$ см.

4.195. Красный луч лазера, работающего на длине волны $\lambda = 630$ нм, имеет вид конуса с углом при вершине $\alpha = 10^{-4}$ рад (угол расходимости пучка). Оптическая мощность излучения $P_0 = 3$ мВт. На каком максимальном расстоянии L наблюдатель сможет увидеть свет лазера, если глаз надежно регистрирует $n = 100$ фотонов в секунду? Диаметр зрачка $d_{\text{зр}} = 0,5$ см. Поглощение света не учитывать.

4.196. При исследовании вакуумного фотоэлемента оказалось, что при освещении катода K светом частоты $\nu_0 = 10^{15}$ Гц фототок с поверхности катода прекращается при задерживающей разности потенциалов $V_z = 2$ В между катодом и анодом (рис. 4.55). Определить работу выхода материала катода.

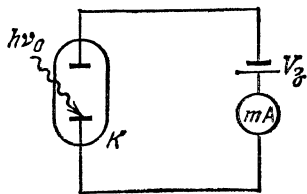


Рис. 4.55.

4.197. Катод фотоэлемента освещается монохроматическим светом с длиной волны λ . При отрицательном потенциале на аноде $V_1 = -1,6$ В ток в цепи прекращается. При изменении длины волны света в 1,5 раза для прекращения тока потребовалось подать на анод отрицательный потенциал $V_2 = -1,8$ В. Определить работу выхода материала катода.

4.198. Для измерения постоянной Планка катод вакуумного фотоэлемента освещается монохроматическим светом. При длине волны излучения $\lambda = 620$ нм ток фотоэлектронов прекращается, если в цепь между катодом и анодом включить задерживающий потенциал V_z не меньше определенного значения. При увеличении длины волны на 25 % задерживающий потенциал оказывается на 0,4 В меньше. Определить по этим данным постоянную Планка.

4.199. При освещении вакуумного фотоэлемента желтым светом ($\lambda_1 = 600$ нм) он заряжается до разности потенциалов $V_1 = 1,2$ В. До какой разности потенциалов зарядится фотоэлемент при освещении его фиолетовым светом ($\lambda_2 = 400$ нм)?

*) В задачах этого раздела там, где это необходимо, считать известными постоянную Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с и заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

4.200. Плоский алюминиевый электрод освещается ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 83$ нм. На какое максимальное расстояние l от поверхности электрода может удалиться фотоеlectron, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженности $E = 7,5$ В/см? Красная граница фотоэффекта для алюминия соответствует длине волны $\lambda_0 = 332$ нм.

4.201. Излучение аргонового лазера с длиной волны $\lambda = 500$ нм сфокусировано на плоском фотокатоде в пятно диаметра $d = 0,1$ мм. Работа выхода фотокатода $A = 2$ эВ. На анод, расположенный на расстоянии $l = 30$ мм от катода, подано ускоряющее напряжение $V = 4$ кВ. Найти диаметр пятна фотоэлектронов на аноде. Анод считать плоским и расположенным параллельно поверхности катода.

4.202. Рентгеновское (тормозное) излучение возникает при бомбардировке быстрыми электронами металлического антикатада рентгеновской трубки. Определить длину волны коротковолновой границы спектра тормозного излучения, если скорость электронов составляет 40 % от скорости света в вакууме.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

I. МЕХАНИКА

Кинематика

1.1. $t = 2$ с.

1.2. Время t движения груза вдоль хорды определяется из соотношения $t^2 = 2L/a$, где a — ускорение груза, L — длина хорды. Если хорда составляет с вертикалью угол α , то $a = g \cos \alpha$, $L = D \cos \alpha$, где D — диаметр окружности. Таким образом, $t^2 = 2D/g$. Время движения грузов вдоль любой из хорд будет одним и тем же.

1.3. $n = (v/d) \sqrt{2H/g} = 90$.

1.4. Так как трения нет, то независимо от пути скорость шарика в точке C будет одной и той же. Зависимость скорости от времени изобразится линиями, наклоны которых на участках желоба AB и DC , BC и AD одинаковы. На рис. 1.81 пути равны площадям под кривыми Odc и Obc' . Так как пути одинаковы, площади эти должны быть равны, и уже поэтому ясно, что $t_{ABC} > t_{ADC}$.

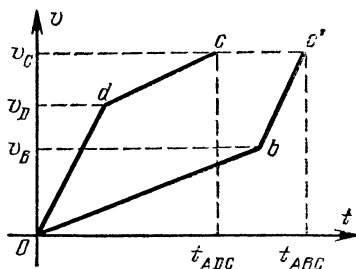


Рис. 1.81.

Проведем расчет времени соскальзывания по обоим путям:

$$t_{AD} = \sqrt{2h/g}, \quad v_D = \sqrt{2gh}.$$

Так как $DC = h = v_D t_{DC} + (gt_{DC}^2/2) \sin \alpha$, то

$$t_{DC} = -\frac{v_D}{g \sin \alpha} + \sqrt{\frac{v_D^2}{g^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2h}{g \sin \alpha}}.$$

Следовательно,

$$t_{ADC} = t_{AD} + t_{DC} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sin \alpha} (\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sin \alpha - 1).$$

Аналогично для t_{ABC} :

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin \alpha}}, \quad v_B = \sqrt{2gh \sin \alpha}, \quad t_{BC} = -\frac{v_B}{g} + \sqrt{\frac{v_B^2}{g^2} + \frac{2h}{g}},$$

откуда

$$t_{ABC} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{1 - \sin \alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} + \sqrt{1 + \sin \alpha} \right).$$

Теперь легко найти разность:

$$t_{ABC} - t_{ADC} = \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha}} (\sqrt{\sin \alpha + 1} - \sqrt{1 + \sin \alpha}) > 0,$$

поскольку $\sqrt{\sin \alpha + 1} > \sqrt{\sin \alpha + 1}$.

1.5. $\sin \alpha = (v_1/v_2) \sin \beta$, $\alpha = 14,5^\circ$.

1.6. Построим вектор скорости катера относительно лодки $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_л$ (рис. 1.82). Проведем через точку B прямую, параллельную вектору \mathbf{v}_0 , и опустим на эту прямую перпендикуляр из точки A . Длина этого перпендикуляра AO и есть наименьшее расстояние между лодкой и катером.

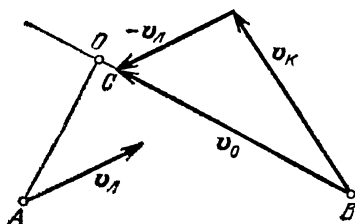


Рис. 1.82.

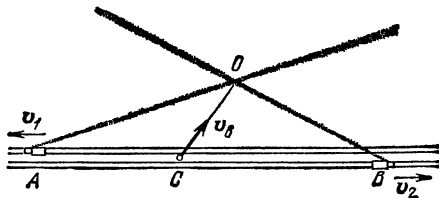


Рис. 1.83.

1.7. Разделим расстояние между паровозами AB в отношении $5:7$ и определим таким образом точку C , в которой они встретились (рис. 1.83). Точку пересечения дымовых шлейфов снесло ветром из C в O , и, следовательно, скорость ветра $\mathbf{v}_в$ направлена вдоль прямой CO . Измерив на рис. 1.83 длины отрезков CO (l_1) и AB (l_2), находим скорость ветра: $v_в = (v_1 + v_2) l_1/l_2 \approx \approx 32 \text{ км/ч} \approx 9 \text{ м/с}$.

1.8. $v = \sqrt{(l/t)^2 + (gt/2 - H/t)^2} = 5,25 \text{ м/с}$.

1.9. Пусть струя воды вылетает со скоростью v из трубы, направленной под углом α к горизонту. Тогда вода поднимется на максимальную высоту $h = (v^2/2g) \sin^2 \alpha$, где $v \sin \alpha$ — вертикальная составляющая скорости v . Обозначая через h_1 , h_2 , h_3 максимальные высоты подъема, соответствующие углам α , равным 60° , 45° и 30° , получим

$$h_1 : h_2 : h_3 = (\sin 60^\circ)^2 : (\sin 45^\circ)^2 : (\sin 30^\circ)^2 = 3 : 2 : 1.$$

Время t полета струи воды равно удвоенному времени подъема на высоту h : $t = (2v/g) \sin \alpha$. За это время вода пройдет в горизонтальном направлении путь $L = vt \cos \alpha = (v^2/g) \sin 2\alpha$, откуда

$$L_1 : L_2 : L_3 = \sin 120^\circ : \sin 90^\circ : \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 : 1 : \sqrt{3}/2.$$

1.10. Струи воды, вылетающие из насадки под углом α , попадут на землю в различных точках окружности радиуса R (рис. 1.84). Из решения задачи 1.9

следует, что $R = (v^2/g) \sin 2\alpha$ (то, что α — угол с вертикалью, а не с горизонталью, роли не играет, так как $|\sin 2\alpha| = |\sin 2(90^\circ - \alpha)|$). Струи, вылетающие под углом $\alpha + \Delta\alpha$, попадают на окруж-

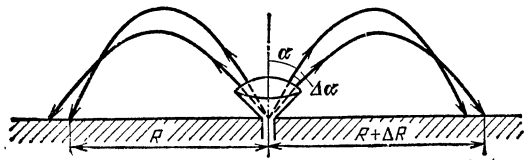


Рис. 1.84.

ность радиуса $R + \Delta R = (v^2/g) \sin 2(\alpha + \Delta\alpha)$. Если приращение угла $\Delta\alpha$ мало, то $\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$, а $\cos \Delta\alpha \approx 1$. Используя тригонометрические формулы, найдем $\Delta R = (2v^2/g) \cos 2\alpha \cdot \Delta\alpha$.

Площадь кольца на земле, орошаемого водой, вытекающей из насадки под углами от α до $\alpha + \Delta\alpha$,

$$\Delta S = 2\pi R \cdot \Delta R = (2\pi v^4/g^2) \sin 4\alpha \cdot \Delta\alpha.$$

Масса воды, попадающей в единицу времени на эту площадь, пропорциональна площади кольца на поверхности насадки, заключенного между углами α и $\alpha + \Delta\alpha$, и числу отверстий $\rho(\alpha)$, приходящихся на единицу площади:

$$M \propto \rho(\alpha) \cdot 2\pi r_0 \sin \alpha \cdot r_0 \cdot \Delta\alpha \propto \rho(\alpha) \sin \alpha \cdot \Delta\alpha,$$

где r_0 — радиус поверхности насадки. По условию задачи $M/\Delta S = \text{const}$ (условие равномерного полива). Число отверстий, приходящихся на единицу площади насадки, должно при этом зависеть от угла α по закону $\rho(\alpha) \propto \sin 4\alpha / \sin \alpha$.

1.11. Скорость течения реки на расстоянии x от берега (рис. 1.85) $u = u_L x/L$. Составляющие скорости лодки относительно берега вдоль осей x и y будут $v_x = v \cos \varphi$, $v_y = v \sin \varphi - u$ (v — скорость лодки относительно воды); и так как $x = vt \cos \varphi$, то

$$v_y = v \sin \varphi - \frac{u_L}{L} vt \cos \varphi.$$

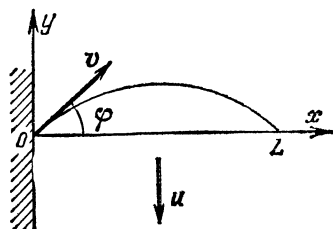


Рис. 1.85.

Таким образом, движение лодки вдоль оси x — равномерное, а вдоль y — равнозамедленное.

Через время t после отплытия лодка будет иметь координаты x и y , причем

$$x = vt \cos \varphi, \quad y = vt \sin \varphi - \frac{u_L}{L} \frac{vt^2 \cos \varphi}{2}.$$

В момент встречи лодки с плотом $t = T$ координаты $y = 0$, $x = L$. Следовательно,

$$L = vT \cos \varphi, \quad 0 = vT \sin \varphi - \frac{u_L}{L} \frac{vT^2 \cos \varphi}{2};$$

отсюда $\sin \varphi = u_L/2v$ и $T = L/(v \cos \varphi)$. Подставляя заданные значения, получим $\varphi = 30^\circ$, $T \approx 35$ с. Если $u_L \geq 2v$, то встреча лодки с плотом невозможна.

1.12. Из каждой точки, которую пролетает самолет, распространяется сферическая звуковая волна (несколько таких волн в момент нахождения самолета в точке A изображено на рис. 1.86). Границей зоны, в которую дошел звук, служит конус, являющийся огибающей для этих волн; AB и AC — линии пересечения этого конуса с плоскостью чертежа (плоскость чертежа перпендикулярна к поверхности Земли). Сначала до точки B дойдет звук из точки O_1 ($BO_1 \perp AB$). OA — путь, пройденный

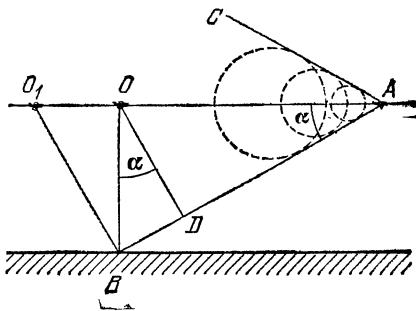


Рис. 1.86.

самолетом с того момента, как он пролетел над наблюдателем, до того, когда наблюдатель услышал звук. OD — путь, пройденный за то же время звуковой волной из точки O ($OD \perp AB$). Углы BAO и BOD равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами (обозначим эти углы через α). Как видно из рис. 1.86,

$$\cos \alpha = OD/OB = ct/H, \quad \sin \alpha = OD/OA = ct/vt = c/v,$$

откуда скорость самолета $v = cH/(H^2 - c^2t^2)^{1/2} = 583$ м/с.

1.13. $H = ct/(1 - c^2/v^2)^{1/2} = 10$ км.

1.14. $t = \sqrt{3}/2\pi n = 0,41$ с.

1.15. $u = [v^2 + (2\pi n R)^2]^{1/2} = 0,5$ м/с; $a = (2\pi n)^2 R = 0,8$ м/с².

1.16. Перемещение тени Луны по поверхности Земли происходит из-за поворота Земли вокруг своей оси (Δl_1) и перемещения Луны по своей орбите (Δl_2). За время Δt эти перемещения равны

$$\Delta l_1 = (2\pi R_3/T_3) \Delta t, \quad \Delta l_2 = (2\pi r/T_L) \Delta t,$$

где $T_3 = 1$ сут, а $T_L = 28T_3$. Так как Луна движется по орбите в ту же сторону, куда вращается Земля, результирующее смещение тени

$$\Delta l = \Delta l_2 - \Delta l_1 = 2\pi (r/T_L - R_3/T_3) \Delta t.$$

Скорость смещения тени

$$v = 2\pi (r/T_L - R_3/T_3) = 0,52 \text{ км/с.}$$

1.17. $v = \sqrt{\pi R g}$.

Статика

1.18. $k \geq 1/\sin \alpha$.

1.19. Рассмотрим силы, действующие на лестницу (рис. 1.87), и запишем условия равновесия:

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}} - N_1 &= 0, & Mg + mg - N_2 &= 0, \\ mg(l/2) \cos \alpha + Mg(l - a) \cos \alpha - N_1 l \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, найдем

$$F_{\text{тр}} = \left(\frac{m}{2} + \frac{2M}{3} \right) g \operatorname{ctg} \alpha = 275 \text{ Н}, \quad N_2 = (M + m)g = 750 \text{ Н}.$$

Лестница давит на пол с силой $F = (F_{\text{тр}}^2 + N_2^2)^{1/2} = 800$ Н. Эта сила направлена к вертикали под углом $\beta = \arctg (F_{\text{тр}}/N_2) \approx 20^\circ$.

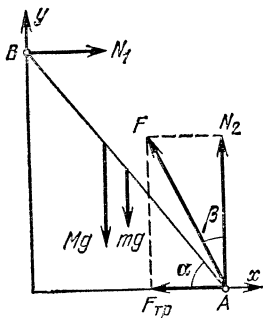


Рис. 1.87.

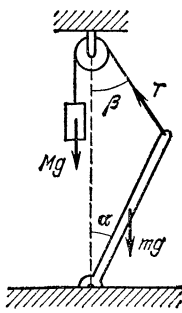


Рис. 1.88.

1.20. Штанга стоит устойчиво, если при малых отклонениях от положения равновесия возникает момент сил, возвращающий ее обратно. Отклоним штангу на малый угол α от вертикали (рис. 1.88). Штанга вернется в вертикальное положение, если момент силы натяжения нити $T = Mg$ больше момента силы тяжести

шаги mg :

$$MgH \sin \beta > mg (l/2) \sin \alpha.$$

Связь между углами α и β можно найти по теореме синусов: $\frac{\sin \beta}{l} = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{H}$.

Учитывая, что углы α и β малы, и заменяя приближенно синусы углов самими углами, находим, что $\beta = \alpha l / (H - l)$. Итак, равновесие устойчиво, если $M > m(H - l) / 2H$.

1.21. $l_0 = (ml_1 + Ml_2) / (M + m)$.

1.22. $\alpha = \varphi$.

1.23. Рассмотрим силы, действующие на брусок (рис. 1.89), и запишем условия равновесия для проекций сил на оси x и y :

$$mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} - F \cos \alpha = 0, \quad N - mg \cos \alpha - F \sin \alpha = 0.$$

Так как мы ищем минимальную силу F , сила трения должна быть направлена вверх по наклонной плоскости и иметь максимально возможное значение: $F_{\text{тр}} = kN$.

Учитывая это, находим

$$F = mg (\operatorname{tg} \alpha - k) / (1 + k \operatorname{tg} \alpha) = 3,3 \text{ Н}.$$

1.24. В этом случае сила трения направлена вниз по наклонной плоскости, так что

$$F = mg (\operatorname{tg} \alpha + k) / (1 - k \operatorname{tg} \alpha) = 21,4 \text{ Н}.$$

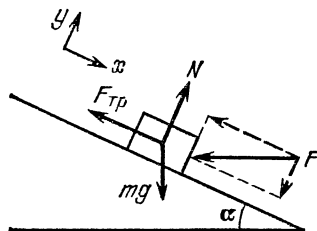


Рис. 1.89.

1.25. Рассмотрим силы, действующие на брусок (рис. 1.90). Брусок начнет приподниматься, когда сила реакции опоры N будет приложена в точке A . Запишем условия равновесия бруска:

$$F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0, \quad N + F \sin \alpha - mg = 0, \\ F_{\text{тр}} a/2 + N b/2 = F (b/2) \sin \alpha.$$

Последнее уравнение является условием равенства нулю момента сил относительно центра бруска O . По условию брусок движется; следовательно, $F_{\text{тр}} = kN$. Решая получившуюся систему уравнений, находим $\operatorname{tg} \alpha = a/b + 1/k$.

1.26. $F = \frac{mg}{2} \left(\frac{a}{b} \cos \alpha - \sin \alpha \right)$.

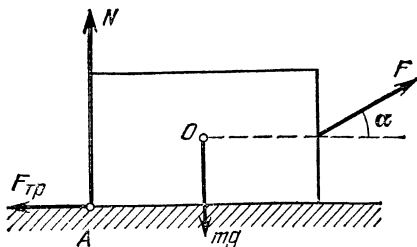


Рис. 1.90.

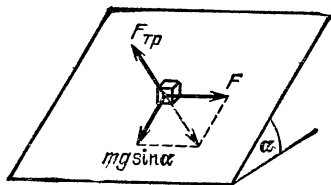


Рис. 1.91.

1.27. Рассмотрим проекции на наклонную плоскость сил, действующих на брусок (рис. 1.91). Так как мы ищем предельное условие равновесия, сила трения покоя достигает своего максимального значения: $F_{\text{тр}} = kN = kmg \cos \alpha$.

Эта сила уравнивает равнодействующую двух взаимно перпендикулярных сил: F и проекции силы тяжести $mg \sin \alpha$. Следовательно,

$$F_{\text{тр}}^2 = F^2 + (mg \sin \alpha)^2,$$

откуда

$$F_{\text{min}} = mg [(k \cos \alpha)^2 - \sin^2 \alpha]^{1/2} = 0,47 \text{ Н.}$$

1.28. Карандаш не вращается, если $k \leq 1/\sqrt{3} = 0,58$.

1.29. Задние колеса дают сильнее на величину

$$\Delta N = 2Mg \sin \alpha \cdot H/L = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

1.30. Центр масс грузовика находится на расстоянии $x = L/4$ от его задних колес. Вычисляя моменты сил относительно точки соприкосновения заднего колеса с землей, получим условие опрокидывания грузовика:

$$Th + MgH \sin \alpha \geq Mg x \cos \alpha,$$

где сила натяжения троса $T = mg \sin \alpha$. Условие опрокидывания можно переписать в виде

$$(mgh + MgH) \sin \alpha \geq Mg (L/4) \cos \alpha,$$

откуда $\tan \alpha \geq \frac{ML/4}{mL + MH} = 0,4$, т. е. реальной опасности опрокидывания для $\alpha = 10^\circ$ нет.

1.31. Действие различных сил на автомобиль поясняется рис. 1.92, где N_1 и N_2 — силы реакции опоры, $F_{\text{тр}}$ — сила трения. Для равновесия автомобиля необходимо, чтобы сумма моментов всех сил относительно центра масс равнялась нулю, т. е.

$$N_2 d/2 = N_1 d/2 + F_{\text{тр}} h.$$

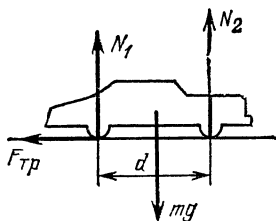


Рис. 1.92.

Поскольку сила трения действует только в заднем колесе, то $F_{\text{тр}} = kN_1$. Кроме того, очевидно, что $N_1 + N_2 - mg = 0$. Исключая из этих уравнений величины N_1 и $F_{\text{тр}}$, получим $N_2 = \frac{mg d + 2kh}{2 d + kh}$. Если

$k = 0$, то, как и следовало ожидать, $N_{20} = mg/2$.

Если k очень велико, то в последнем уравнении можно пренебречь d по сравнению с kh . Тогда получим $N_2 = mg$. Изменение силы давления передних колес при торможении

$$\Delta N = N_2 - N_{20} = \frac{mg}{2} \frac{kh}{d + kh} = 480 \text{ Н.}$$

1.32. $a = (k + \tan \alpha) g / (1 - k \tan \alpha)$, причем должно быть $k \tan \alpha < 1$.

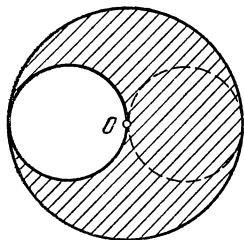


Рис. 1.93.

1.33. Предположим, что в пластине симметрично первому отверстию вырезано второе (рис. 1.93). Тогда центр масс оставшейся части пластины будет расположен в ее геометрическом центре, т. е. в точке O . Центр масс части пластины, заключенной внутри штриховой линии, находится на расстоянии $R/2$ от точки O . Если M — масса целой пластины, а m — масса вырезанной ее части, то положение центра масс пластины с отверстием определится из соотношения $(M - 2m)x = m(R/2 - x)$,

где x — расстояние искомого центра масс от точки O . Учитывая, что $m/M = 1/4$ (массы относятся как площади соответствующих частей диска), получим $x = R/6$.

1.34. катушка не будет вращаться, если момент силы трения относительно центра масс будет равен моменту силы F , приводящей катушку в движение (рис. 1.94), т. е. если $RF_{\text{тр}} = rF$. Очевидно, что $F_{\text{тр}} = mgk$, а $F = mgk + ma$, где m — масса катушки. Подставив эти выражения, получим $k = ra/(R - r)g$.

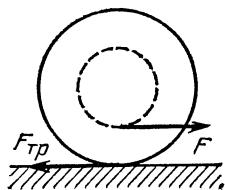


Рис. 1.94.

1.35. а) катушка неподвижна; б) катушка движется вправо, в ту сторону, куда тянут нить; в) катушка движется влево, в сторону, противоположную той, куда тянут нить.

1.36. При увеличении угла α цилиндр может либо соскользнуть, либо скатиться (рис. 1.95). Скольжение наступит, когда составляющая силы тяжести цилиндра вдоль дощечки станет больше максимального значения силы трения. Если α_1 — угол, при котором начинается скольжение, m_1g — избыточная сила тяжести вещества, заполняющего отверстие, а mg — сила тяжести однородного цилиндра, то

$$(m + m_1)g \sin \alpha_1 = k(m + m_1)g \cos \alpha_1,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k = 0,3.$$

Определим теперь угол α_2 , начиная с которого возникает чистое (без проскальзывания) качение цилиндра. Для этого заметим, что, поскольку скольжения нет, сила трения меньше своего максимального значения и равна составляющей силы тяжести вдоль дощечки, т. е. величине $(m + m_1)g \sin \alpha_2$. Очевидно, цилиндр сможет удерживаться на дощечке, пока момент силы трения относительно его оси не превысит максимально возможного значения момента силы m_1g , который соответствует горизонтальному расположению линии центров отверстия и цилиндра. Таким образом, для $\alpha = \alpha_2$ будем иметь

$$R(m + m_1)g \sin \alpha_2 = 2Rm_1g/3.$$

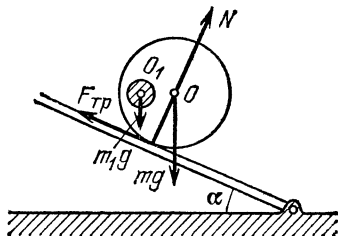


Рис. 1.95.

Поскольку, как нетрудно видеть, $m_1 = 5m/8$, то это равенство дает $\sin \alpha_2 = 10/39$. При этом $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0,26 < \operatorname{tg} \alpha_1$. Следовательно, равенство моментов нарушится раньше, и цилиндр начнет скатываться без скольжения. Заметим, что ось, относительно которой вычисляются моменты, можно выбрать произвольно, однако в данном случае вычисления получаются более простыми, если эта ось совпадает с осью цилиндра.

1.37. Конусы движутся относительно друг друга с проскальзыванием, за исключением одной точки, где их линейные скорости совпадают. Обозначим координату этой точки, отсчитанную от вершины второго конуса, через x_0 . В этой точке сила трения скольжения, действующая на второй конус, меняет знак (рис. 1.96, а), так как до этой точки первый конус имеет большие скорости, а за этой точкой меньшие, чем второй.

Второй вал не нагружен, поэтому второй конус будет вращаться с постоянной угловой скоростью, если суммарный момент сил трения, действующий на

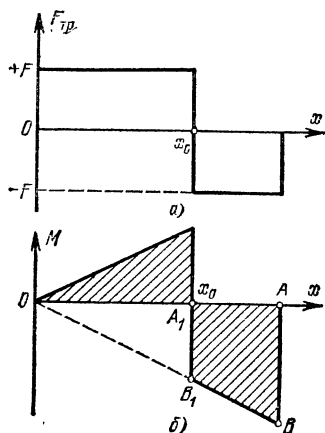


Рис. 1.96.

него, будет равен нулю. Так как сила трения, действующая на единицу длины конуса, постоянна, ее момент линейно увеличивается от вершины конуса к основанию (за счет увеличения плеча силы). В точке x_0 момент, так же как и сила, меняет знак (рис. 1.96, б).

Пусть H — высота конуса, R — радиус основания, а r_0 — радиус в точке x_0 . Равенство суммарного момента сил трения нулю означает, что равны площади треугольника и трапеции, заштрихованные на рис. 1.96, б: $x_0 F r_0 / 2 = H F R / 4$. Из подобия треугольников OAB и OA_1B_1 получаем, что $x_0 / r_0 = H / R$. Из этих двух уравнений находим $r_0 = R / \sqrt{2}$.

Линейные скорости обоих конусов в точке x_0 равны: $\omega_1 (R - r_0) = \omega_2 r_0$. Подставляя в это уравнение r_0 , определяем ω_2 : $\omega_2 = \omega_1 (\sqrt{2} - 1) \approx 0,41 \omega_1$.

Динамика

1.38. Выясним, достаточно ли прочность нити, чтобы бруски могли двигаться под действием силы F . Рассмотрим силы, действующие на каждый из брусков в первом случае (рис. 1.97, а). Если бруски движутся, на них действуют силы трения скольжения и силы натяжения нитей. При этом

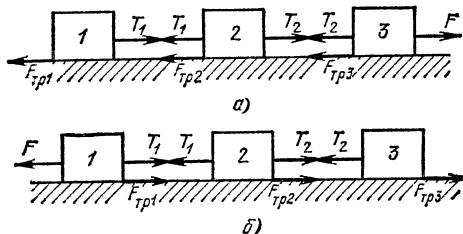


Рис. 1.97.

$$T_1 \geq k_1 Mg = 15 \text{ Н}, \\ T_2 \geq T_1 + k_2 Mg \geq 25 \text{ Н} > T.$$

Таким образом, нить 2 порвется раньше, чем бруски начнут двигаться. В момент отрыва сила натяжения $T_2 = T = 20 \text{ Н}$. Так как нить 2 натянута, сила трения бруска 3 достигла своего максимального значения: $F_{тр3} = k_3 Mg = 5 \text{ Н}$.

Брусок 3 не движется; следовательно, $F = T_2 + k_3 Mg = 25 \text{ Н}$. Если сила F приложена к бруску 1 (рис. 1.97, б), картина существенно меняется. Проведя такой же анализ, как в первом случае, убедимся, что теперь бруски при увеличении силы F начнут двигаться. Их ускорение $a = [F - (k_1 + k_2 + k_3) Mg] / 3M$. При этом

$$T_2 = Ma + k_3 Mg, \quad T_1 = T_2 + Ma + k_2 Mg.$$

Так как $T_1 > T_2$, порвется нить 1. В этот момент сила натяжения $T_1 = T = 20 \text{ Н}$. Выразим силу F через T_1 и силы трения:

$$F = (3/2) [T_1 - (k_2 + k_3) Mg] + (k_1 + k_2 + k_3) Mg = 37,5 \text{ Н}.$$

1.39. Сила натяжения в верхнем конце веревки

$$T_B = \frac{m_2 + m}{m_1 + m_2 + m} F = 106 \text{ Н};$$

в середине веревки

$$T_c = \frac{m_2 + m/2}{m_1 + m_2 + m} F = 82,6 \text{ Н.}$$

1.40. Так как трение в оси блока и его масса пренебрежимо малы, то сила натяжения T вдоль веревки, связывающей грузы, будет постоянна. Поэтому уравнения движения для грузов m_1 и m_2 будут иметь вид (рис. 1.98)

$$m_1 a = m_1 g - T, \quad m_2 a = T - m_2 g,$$

где a — ускорение грузов. Пружинные весы растягиваются с силой $2T$. Из уравнений движения имеем

$$2T = 4m_1 m_2 g / (m_1 + m_2) = 4,7 \text{ Н}, \quad T = 2,35 \text{ Н},$$

$$a = (m_1 - m_2) g / (m_1 + m_2) = 1,96 \text{ м/с}^2.$$

$$\mathbf{1.41.} \quad a = \frac{(m_1 - m_2) g - F_{\text{тр}}}{m_1 + m_2} \approx 1,6 \text{ м/с}^2,$$

$$T = m_1 \frac{2m_2 g + F_{\text{тр}}}{m_1 + m_2} = 4,2 \text{ Н.}$$

1.42. Сила натяжения вдоль всей веревки постоянна. Поэтому уравнения движения грузов m_1 и m_2 имеют вид $m_1 a_1 = m_1 g - T$, $m_2 a_2 = 2T - m_2 g$. Нетрудно видеть, что $a_1 = 2a_2$ (почему?). Учитывая это, получаем $a_1 = \frac{2m_1 - m_2}{2m_1 + m_2/2} g$.

1.43. Так как груз M неподвижен, то сила натяжения веревки все время постоянна и равна силе тяжести груза M . На обезьяну действует сила тяжести (вниз) и сила натяжения веревки (вверх). Отсюда ускорение обезьяны $a = (M - m) g / m$ и время $t = (2l/a)^{1/2} = 4 \text{ с}$.

$$\mathbf{1.44.} \quad F = (1/2) mg (k_2 - k_1) \cos \alpha = 0,63 \text{ Н.}$$

$$\mathbf{1.45.} \quad F_{\text{тр}} = \frac{M}{M + m} F \cos \alpha - mg \sin \alpha.$$

$$\mathbf{1.46.} \quad t = \left(\frac{2l}{a} \right)^{1/2} = \left(\frac{2h \cos \alpha}{g \sin \beta \cdot \sin (\beta - \alpha)} \right)^{1/2}.$$

1.47. Как следует из рис. 1.99,

$$F_{\text{тр}} = kmg \cos \alpha, \quad F = mg \sin \alpha,$$

где m — масса автомобиля, $F_{\text{тр}}$ — сила трения, F — равнодействующая силы тяжести mg и силы реакции N . Отсюда

$$ma = F_{\text{тр}} - F, \quad \text{или} \quad a = g (k \cos \alpha - \sin \alpha);$$

следовательно, $k = (a + g \sin \alpha) / g \cos \alpha \approx 0,66$.

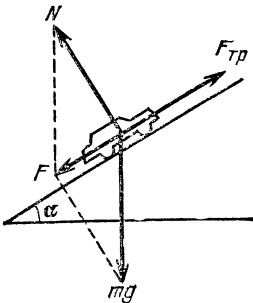


Рис. 1.99.

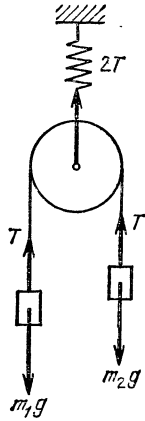


Рис. 1.98.

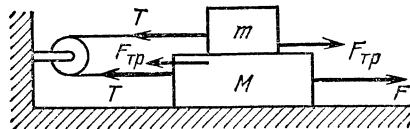


Рис. 1.100.

1.48. Уравнения движения для нижнего и верхнего брусьев имеют вид (рис. 1.100)

$$Ma = F - T - F_{\text{тр}}, \quad ma = T - F_{\text{тр}},$$

где T — сила натяжения веревки. Учитывая, что $F_{\text{тр}} = mgk$, получим $F = a(M + m) + 2mgk = 24,5 \text{ Н}$.

1.49. Рассмотрим силы, действующие на брусок и плиту (рис. 1.101). Предположим, что брусок скользит вниз по плите ($a_1 > a_2$). Тогда сила трения, действующая на брусок, направлена вверх и равна $F_1 = k_1 N_1$. Если плита скользит по наклонной плоскости, $F_2 = k_2 N_2$. Запишем уравнения движения бруска и плиты в проекциях на оси x и y :

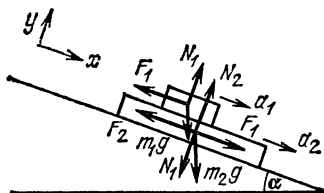


Рис. 1.101.

$$m_1 g \sin \alpha - k_1 N_1 = m_1 a_1,$$

$$N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0,$$

$$m_2 g \sin \alpha + k_1 N_1 - k_2 N_2 = m_2 a_2,$$

$$N_2 - N_1 - m_2 g \cos \alpha = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$a_1 = g (\sin \alpha - k_1 \cos \alpha) = 3,7 \text{ м/с}^2,$$

$$a_2 = g \left(\sin \alpha + k_1 \frac{m_1}{m_2} \cos \alpha - k_2 \frac{m_2 + m_1}{m_2} \cos \alpha \right) = 1,8 \text{ м/с}^2.$$

Решение дало $a_1 > a_2$; значит, сделанное выше предположение было правильно. Плита не будет двигаться, если

$$k_2 \geq \frac{m_2 [\sin \alpha + k_1 (m_1/m_2) \cos \alpha]}{(m_1 + m_2) \cos \alpha} = 0,44.$$

1.50. Уравнения движения грузов имеют вид

$$ma = mg - T, \quad ma = T - (F_{\text{тр}} + F),$$

где T — сила натяжения веревки, a — ускорение грузов, $F_{\text{тр}} = kmg \cos \alpha$ — сила трения, сила $F = mg \cos \alpha$. Подставляя эти значения в исходную систему уравнений и исключая из них a , найдем

$$2T = mg + F_{\text{тр}} + F = mg (1 + k \cos \alpha + \sin \alpha).$$

На блок действуют две одинаковые силы натяжения T , угол между которыми равен $\pi/2 - \alpha$. Сила давления блока на ось $N = 2T \cos (\pi/4 - \alpha/2)$.

1.51. Человек должен двигаться вниз с ускорением

$$a = \frac{m + M}{M} g (\sin \alpha - k \cos \alpha) = 3,5 \text{ м/с}^2.$$

1.52. Человек должен двигаться вверх с ускорением

$$a = \frac{m + M}{M} g (k \cos \alpha - \sin \alpha) = 3 \text{ м/с}^2.$$

1.53. Поскольку трение отсутствует, на цилиндр не будут действовать никакие силы, касательные к его поверхности. Поэтому при увеличении ускорения доски цилиндр будет подниматься на ступеньку, не поворачиваясь. Запишем второй закон Ньютона для горизонтального и вертикального направлений, предполагая, что цилиндр неподвижен относительно доски (рис. 1.102):

$$ma = N_1 \cos \alpha, \quad 0 = mg - N_1 \sin \alpha - N,$$

где $\sin \alpha = (R - H)/R$. Учитывая, что при максимально возможном ускорении a_{\max} сила реакции $N = 0$, получим $a_{\max} = g [H (2R - H)]^{1/2} / (R - H)$.

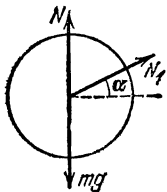


Рис. 1.102.

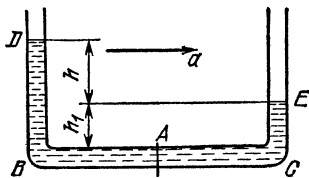


Рис. 1.103.

1.54. Ртуть движется с ускорением a ; следовательно, на нее действует горизонтальная сила. На ртутные столбики DB и EC действует сила со стороны стенок трубки (рис. 1.103). На горизонтальном участке BC на ртуть будет действовать сила за счет разности давлений $P_B - P_C$ в сечениях B и C :

$$\rho \cdot 2LSa = \rho ghS, \quad h = 2La/g.$$

Ртуть начнет выливаться, если $h > H$, т. е. $a > gH/2L$. Давление в сечении A

$$P_A = \frac{P_B + P_C}{2} = \frac{1}{2} [P_0 + \rho g (h + h_1) + P_0 + \rho gh_1];$$

но $h + 2h_1 = H$, поэтому $P_A = P_0 + \rho gH/2$.

1.55. $t = v/kg = 10$ с.

1.56. На пассажира при разгоне действует сила тяжести mg и реакция опоры со стороны кресла N . Векторная сумма этих сил сообщает пассажиру горизонтальное ускорение $a = v^2/2L$. Перегрузка

$$n = N/mg = [1 + (v^2/2Lg)^2]^{1/2} = 1,01.$$

1.57. $t = (2mv/k)^{1/2} = 10$ с, где k — тангенс угла наклона графика, заданного рис. 1.34.

1.58. Учитывая, что импульс силы равен площади под графиком, заданным рис. 1.35, получаем $v = F_{\max} t_0 / 2m = 28$ м/с.

1.59. Разгон лыжника происходит под действием проекции силы тяжести на направление склона, силы трения и силы сопротивления воздуха. Скорость достигает максимального значения, когда сумма этих сил обращается в нуль:

$$mg \sin \varphi = kmg \cos \varphi + \alpha v^2,$$

откуда находим

$$v = [mg (\sin \varphi - k \cos \varphi) / \alpha]^{1/2} = 100 \text{ км/ч.}$$

1.60. $v_2 = v_1 (m_2/m_1)^{1/2} = 3,5$ м/с.

1.61. На левый шарик действуют сила тяжести mg и сила натяжения нити T . На правый шарик, кроме того, действуют архимедова сила $\rho_{\text{ж}} Vg$ и сила сопротивления жидкости kv (где V — объем шарика, k — постоянная величина, v — скорость шарика). При свободном падении в жидкости шарик имеет установившуюся скорость v_0 ; следовательно,

$$kv_0 + \rho_{\text{ж}} Vg = \rho Vg, \quad k = (\rho - \rho_{\text{ж}}) Vg / v_0.$$

При установившемся движении суммы сил, действующих на левый и правый шарики, будут равны нулю:

$$\rho V g = T, \quad T + \rho_{\text{ж}} V g = \rho V g + (\rho - \rho_{\text{ж}}) V g v / v_0,$$

откуда $v = v_0 \rho_{\text{ж}} / (\rho - \rho_{\text{ж}})$.

1.62. Пусть коэффициент трения колес о рельсы равен k . Тогда на отпавшую часть состава действует сила $kMg/3$; ускорение a_1 этой части определим из уравнения

$$Ma_1/3 = kMg/3, \quad a_1 = kg.$$

Следовательно, скорость ее меняется по закону $v = v_0 - kgt$. Время, через которое скорость уменьшится в два раза, $t_1 = v_0/2kg$. На остальную часть состава действуют две силы — сила тяги и сила трения. До разрыва состава сила тяги F_T уравновешивала силу трения: $F_T = kMg$. После разрыва легко найти ускорение a_2 оставшейся части: $2Ma_2/3 = F_T - F_{T\text{п}} = kMg - 2kMg/3$, $a_2 = kg/2$. Скорость этой части $v_2 = v_0 + kgt/2$ и в момент времени t_1 равна

$$v_2 = v_0 + \frac{kg}{2} \frac{v_0}{2kg} = \frac{5}{4} v_0.$$

1.63. После того как веревка натянулась, груз некоторое время продолжает двигаться вниз, но ускорение a груза направлено вверх и равно $a = (T - Mg)/M$. Чтобы, двигаясь с таким ускорением, погасить скорость $v = \sqrt{2gh}$, груз должен пройти путь $l = v^2/2a = Mgh/(T - Mg) = 15$ м.

1.64. Расстояние $H - h$ система проходит за время t_1 , которое находится из уравнения $H - h = at_1^2/2$, где ускорение грузов $a = gm/(2M + m)$. К моменту времени t_1 грузы имеют скорость $v = at_1$. После того как перегрузок зацепился за стойку, грузы проходят путь h за время t_2 , двигаясь равномерно со скоростью v , при этом $t_2 = h/v$. Полное время движения

$$t = t_1 + t_2 = \left[\frac{2(H-h)(2M+m)}{mg} \right]^{1/2} + h \left[\frac{2M+m}{2mg(H-h)} \right]^{1/2} = 3,1 \text{ с.}$$

$$1.65. \quad t = \frac{m}{F} \left(\frac{gL}{\sin 2\alpha} \right)^{1/2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ с.}$$

1.66. Векторная разность конечного и начального импульса первой частицы равна импульсу действовавшей силы I (рис. 1.104, а). Его модуль $I =$

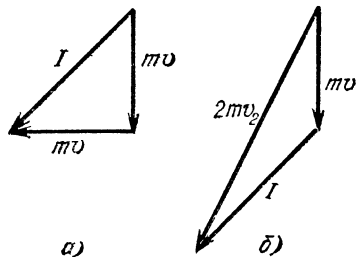


Рис. 1.104.

$= mv\sqrt{2}$. Такой же импульс силы I подействовал на вторую частицу. Ее конечный импульс $2mv_2$ равен векторной сумме ее начального импульса $m v$ и импульса силы I (рис. 1.104, б). Используя теорему косинусов, можно найти конечную скорость v_2 второй частицы: $v_2 = \sqrt{5} v/2$.

$$1.67. \quad v_2 = 5v/2.$$

1.68. Масса воды, которую в единицу времени забирает и выбрасывает назад катер, $m_t = \rho S u$. Когда вода забирается в катер, она приобретает ско-

рость катера v , и на катер (по третьему закону Ньютона) действует сила $F_1 = -\rho S u v$. Когда вода выбрасывается из катера назад со скоростью u , на катер действует сила $F_2 = \rho S u^2$. Результирующая сила, действующая на катер

со стороны воды, $F = F_1 + F_2 = \rho S u (u - v)$. Она равна силе сопротивления, так как катер по условию движется с постоянной скоростью: $\rho S u (u - v) = kv^2$. Решая квадратное уравнение, находим $v = 13,4$ м/с.

1.69. $v = v_0 u / (2u - v_0)$.

1.70. Сила, действующая на самолет со стороны засасываемого воздуха, $F_1 = M_t (u - v)$ (см. решение задачи 1.68); сила, действующая на самолет со стороны топлива, $F_2 = m_t u$. Результирующая сила $F = F_1 + F_2$ уравновешивается силой тяги F_T : $F_T = M_t (u - v) + m_t u = 3,2 \cdot 10^4$ Н.

1.71. Определим силу тяги корабля, когда он движется навстречу потоку частиц. Перейдем в систему координат, связанную с кораблем. Если в неподвижной системе скорость частиц равна u , то в этой системе она равна $u + v$. Так как удар абсолютно упругий, частицы отскакивают от обшивки с той же скоростью. Изменение импульса одной частицы равно $2m(u + v)$. Число частиц, ударяющихся об обшивку в единицу времени, равно $nS(u + v)$, где n — число частиц в единице объема, а S — сечение корабля. Таким образом, сила тяги двигателя в этом случае $F_1 = 2mnS(u + v)^2$. После поворота, когда корабль движется в сторону потока, скорость частиц относительно корабля равна $u - v$, и сила тяги $F_2 = 2mnS(u - v)^2$. При $F_1/F_2 = 4$ получаем два возможных значения скорости частиц: $u_1 = 3v$, $u_2 = v/3$.

1.72. Скорость, с которой вода вытекает из крана, $v_0 = m_t / \rho S = 2$ м/с. Скорость v , которую имеет вода, попадая в сосуд, можно найти с помощью закона сохранения энергии: $v = (v_0^2 + 2gh)^{1/2} = 6,6$ м/с. При попадании в сосуд вода тормозится, происходит абсолютно неупругий удар, вследствие чего на сосуд действует сила, равная изменению импульса струи в единицу времени: $F_1 = m_t v = 1,3$ Н. Кроме того, по мере наполнения сосуда водой на дно действует сила тяжести этой воды, линейно нарастающая со временем: $F_2 = m_t g t$. Общая сила давления на дно $F = F_1 + F_2$. Ее график изображен на рис. 1.105. Время, за которое струя долетает от крана до сосуда, $t_1 = 2h/(v + v_0) = 0,46$ с. Начальную силу давления на дно полагаем равной нулю. Максимальная сила давления на дно $F_2 = F_1 + m_t g t_0 = 5,2$ Н. Сила давления на дно сосуда после того, как струя перестанет попадать в сосуд, $F_3 = F_2 - F_1 = 3,9$ Н.

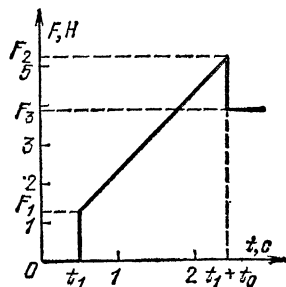


Рис. 1.105.

1.73. $F = [(m_t v)^2 + (Mg)^2]^{1/2} = 20,4$ Н.

1.74. Если поршень перемещается со скоростью v , скорость струи (из-за несжимаемости воды) $u = v(D/d)^2$. Так как трением можно пренебречь, для воды в цилиндре справедливо уравнение Бернулли:

$$P_0 + F/S + \rho v^2/2 = P_0 + \rho u^2/2,$$

где P_0 — атмосферное давление, ρ — плотность воды, а $S = \pi D^2/4$. Из этих соотношений находим $v = \frac{2d^2}{D} \left[\frac{2F}{\pi \rho (D^4 - d^4)} \right]^{1/2}$.

1.75. $F_2 = F_1/2$.

1.76. Когда на груз начинает действовать постоянная сила, он будет совершать колебания около нового положения равновесия. В момент прекращения

ния действия силы скорость будет максимальной, если груз проходит положение равновесия, т. е. если $t_1 = T/4 + nT/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), где период колебаний груза $T = 2\pi \sqrt{m/k} = 0,21$ с. Груз останется после прекращения действия силы неподвижным, если $t_2 = nT$.

1.77. Начальное растяжение пружины $x_0 = mg/k$. Для того чтобы коробка подпрыгнула, пружина должна действовать на нее с силой, направленной вверх и большей силы тяжести коробки Mg , т. е. пружина должна быть сжата на длину $x \geq Mg/k$. Если A — амплитуда колебаний груза, то $x = A - x_0$, откуда получаем $A \geq (M + m)g/k$.

1.78. $A \geq \mu (M + m)g/k$.

1.79. В положении равновесия сумма сил, действующих на груз со стороны обеих пружин, равна нулю: $-k_1(l_1 - A) + k_2(l_2 + A) = 0$; отсюда находим амплитуду колебаний: $A = |k_1 l_1 - k_2 l_2| / (k_1 + k_2)$. Жесткость двух параллельно поставленных пружин равна сумме жесткостей этих пружин: $k = k_1 + k_2$; поэтому период колебаний $T = 2\pi \sqrt{m/(k_1 + k_2)}$.

1.80. Пружина коснется стенки через время $t_1 = a/v_0$. Время сжатия и распрямления пружины у стенки равно половине периода колебаний: $t_2 = \pi \sqrt{m/k}$. После этого тело имеет скорость v_0 , направленную от стенки, и вернется в исходное положение через время $t_3 = t_1 = a/v_0$. Отражение от второй стенки произойдет за то же время. Период колебаний тела

$$T = 2(t_1 + t_2 + t_3) = 4a/v_0 + 2\pi \sqrt{m/k}.$$

1.81. Найдем время t , за которое шарик сместится от положения равновесия на половину амплитуды: $A/2 = A \sin(2\pi t/T_0)$. Известно, что $\sin(\pi/6) = 1/2$, поэтому $t = T_0/12$. К положению равновесия шарик возвращается столько же времени, так как при абсолютно упругом ударе направление скорости меняется на противоположное, а модуль сохраняется. В противоположную сторону от положения равновесия шарик движется так, как если бы плиты не было. Если пренебречь временем соударения шарика с плитой, период колебаний

$$T = 2t + \frac{T_0}{2} = \frac{2T_0}{3} = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

1.82. Пусть груз сместился на расстояние x по вертикали. Растяжение пружины при этом $x_1 = xL/l$. Сила, действующая со стороны пружины на конец штанги, $F_1 = kxL/l$. Штанга невесома, поэтому суммарный момент сил, действующий на нее, должен быть равен нулю. Следовательно, на груз действует возвращающая сила $F_2 = F_1 L/l = kx(L/l)^2$. Таким образом, можно считать, что роль жесткости играет величина $k' = k(L/l)^2$. Период колебаний при этом $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{L} \frac{m}{k}}$.

Работа. Мощность. Энергия

1.83. $v = (2kgL)^{1/2} = 24,5$ м/с = 88 км/ч.

1.84. $L = H(1/k - \text{ctg } \alpha) = 49$ м.

1.85. Начальная потенциальная энергия тела расходуется на работу против сил трения. Подсчитаем, сколько раз тело пройдет по дну туда и обратно, прежде чем остановится:

$$mgH = n \cdot 2kmgL, \quad \text{откуда} \quad n = H/2kL = 4,167,$$

т. е., после того как тело пройдет по дну четыре раза, у него еще останется некоторый запас энергии. Если x — расстояние от середины ямы до точки остановки, то

$$mgH - 8kmg l = kmg(l/2 - x),$$

откуда $x = 8,5l - H/k = 0,33$ м.

$$1.86. A = mgH \left(1 + \frac{k_1 + k_2}{2} \operatorname{ctg} \alpha \right) = 4,5 \text{ кДж.}$$

$$1.87. k \approx (\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2) / (v_2 - v_1) = 0,01.$$

1.88. При равномерном спуске сила сопротивления $F = mg \sin \alpha$. Следовательно, при равномерном подъеме с той же скоростью сила тяги двигателя $F_T = 2mg \sin \alpha$, а мощность двигателя $N = 2mg \sin \alpha \cdot v = 40$ кВт.

1.89. На горизонтальном участке шоссе энергия двигателя расходуется только на работу против сил сопротивления движению автомобиля (сопротивление воздуха, трение о дорогу и в осях колес). Если F — результирующая сила сопротивления, а m_1 — расход бензина на горизонтальном участке шоссе, то можно написать $m_1 q \eta = Fl$. Так как при подъеме автомобиля скорость остается прежней, сила сопротивления не меняется. Но теперь за счет энергии двигателя будет нарастать еще и потенциальная энергия автомобиля. Закон сохранения энергии запишется теперь так: $m_2 q \eta = Fl + Mgh$, где m_2 — расход бензина при подъеме. Таким образом, $m_2 - m_1 = Mghl / q \eta = 2,2$ кг.

$$1.90. F = Mq \eta / vt = 3 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

1.91. Если такси движется без остановок, работа двигателя (а расход бензина ей пропорционален) $A_1 = Fl$. После каждой остановки двигатель совершает дополнительную работу, сообщая автомобилю кинетическую энергию. Поэтому работа двигателя в городе $A_2 = Fl + nMv^2/2$. Отношение расходов бензина $\alpha = 1 + nMv^2/2Fl = 1,7$.

1.92. Капли дождя, стекая по стенкам, приобретают скорость, равную скорости поезда. При этом со стороны капель на поезд действует сила, равная изменению импульса капель в единицу времени: $F = m_t v$. Для того чтобы скорость поезда осталась прежней, сила тяги во время дождя должна возрасти на ту же величину: $\Delta F = m_t v$. Это потребует увеличения мощности локомотива на $\Delta N = \Delta F v = m_t v^2 = 40$ кВт.

1.93. Энергия копра целиком расходуется на преодоление сопротивления грунта. Поэтому

$$mv^2/2 + mgl = Fl, \quad F = m(v^2/2l + g) = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

Отсюда видно, что $mg \ll F$, поэтому поправка mgl в исходном уравнении существенной роли не играет. Заметим, что приведенное решение справедливо только при пренебрежении массой сваи. Если массы сваи и копра сравнимы, то сила F будет зависеть как от массы сваи, так и от характера удара («упругого» или «неупругого») копра о сваю. Мы рекомендуем читателю в качестве полезного упражнения самостоятельно получить точные выражения для силы F в случае «упругого» и «неупругого» ударов.

1.94. Представим силу трения $F_{тр}$ в зависимости от пути l , пройденного санками по асфальту, в виде графика (рис. 1.106). Площадь под графиком равна работе силы трения. На основании закона сохранения энергии

$$mv^2/2 = mgkL/2 + mgkx.$$

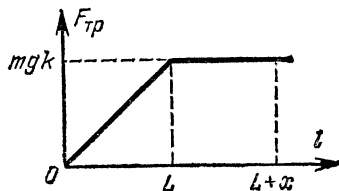


Рис. 1.106.

Отсюда получим $x=0,84$ м. Весь путь, пройденный санками до полной остановки, составит $l=L+x=2,84$ м.

1.95. $F=6mv^2/l=150$ Н.

1.96. Так как доска однородна, то сила трения, действующая на отрезок доски длины Δx , есть $\Delta F=kMg \cdot \Delta x/L$. Путь, проходимый различными точками

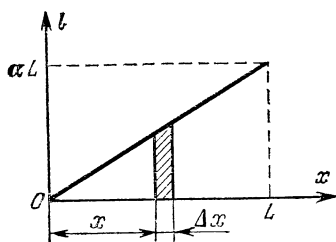


Рис. 1.107.

доски при повороте, $l=\alpha x$, где x — расстояние данной точки от неподвижного конца (рис. 1.107). Работа против силы трения для отрезка доски длины Δx , удаленного от неподвижного конца на расстояние x , $\Delta A = kMg\alpha x \cdot \Delta x/L$, т. е. с точностью до постоянного множителя kMg/L равна площади, заштрихованной на рис. 1.107. Вся работа по повороту доски равна площади под графиком, умноженной на kMg/L : $A=kMg\alpha L/2$.

1.97. $A=(2m+5\rho V/3)gH/2=2,9$ кДж.

1.98. Вода поднимается за поршнем до высоты $h=10$ м (почему?). Работа, совершенная при этом, $A_1=\rho Sh^2g/2$. При дальнейшем движении поршня работа, совершаемая против силы атмосферного давления, $A_2=P_0S(H-h)$. Итак, совершенная при подъеме поршня работа

$$A=\rho Sgh^2/2+P_0S(H-h)=10^4 \text{ Дж.}$$

1.99. Каждый раз при прохождении положения равновесия скорость маятника увеличивается на величину $\Delta v=Ft/m$. За период маятник проходит положение равновесия дважды. Через n колебаний скорость его будет $v_n=2nFt/m$. Для того чтобы маятник отклонился на 90° , его кинетическая энергия при прохождении положения равновесия должна быть равна mgl : $mv_n^2/2=mgl$, откуда $n=m(2gl)^{1/2}/2Ft$.

1.100. Ракеты получают одинаковые приращения скорости Δv . Если скорость первой ракеты была равна v_0 , то относительное приращение ее энергии

$$\frac{m(v_0+\Delta v)^2-mv_0^2}{mv_0^2}=2\frac{\Delta v}{v_0}+\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2.$$

По условию оно равно 4 %: $(\Delta v/v_0)^2+2\Delta v/v_0=0,04$. Решая квадратное уравнение, находим $\Delta v/v_0=0,02$. Скорость второй ракеты $v_2=\Delta v$, ее кинетическая энергия

$$K_2=\frac{mv_2^2}{2}=\frac{m(\Delta v)^2}{2}=(0,02)^2\frac{mv_0^2}{2}=4\cdot 10^{-4}K.$$

1.101. $K=K_0+Ftv_0=5$ Дж.

1.102. Когда веревка висит симметрично относительно блока, ее центр масс находится на расстоянии $l/4$ от ее концов и на таком же расстоянии от блока. В момент соскальзывания с блока центр масс опустился на $l/4$ и, следовательно, потенциальная энергия уменьшилась на $mgl/4$. За счет убыли потенциальной энергии веревка приобретает кинетическую энергию $mv^2/2$. По закону сохранения энергии

$$mv^2/2=mgl/4, \text{ откуда } v=(gl/2)^{1/2}\approx 10 \text{ м/с.}$$

Движение веревки не будет равноускоренным.

1.103. $v_1=\left[\frac{2g|m_1l_1-m_2l_2|}{m_1+m_2(l_2/l_1)^2}\right]^{1/2}.$

1.104. За единицу времени насос на высоту h поднимает массу воды ρV_t (ρ — плотность воды). Мощность, расходуемая на это, $N_1 = \rho V_t g h$. Кроме того, насос сообщает воде скорость $v = V_t/S$. Мощность, расходуемая на ускорение воды, $N_2 = \frac{mv^2}{2t} = \rho \frac{V_t}{2} \left(\frac{V_t}{S} \right)^2$. Полная мощность $N = N_1 + N_2 = \rho V_t (gh + V_t^2/2S^2)$.

1.105. Первоначальная мощность вентилятора $N_1 = m_t v^2/2$, где m_t — масса воздуха, перегоняемого за единицу времени, а v — его скорость. Для того чтобы через то же отверстие перегонять в единицу времени массу воздуха в два раза большую, его скорость нужно увеличить в два раза. Поэтому мощность вентилятора $N_2 = 2m_t (2v)^2/2 = 8N_1$.

1.106. Найдем сначала момент, действующий на вал двигателя. По определению мощность $N = Fv_1 = M_1\omega_1$, где F — сила, действующая в точке зацепления, v_1 — линейная, а ω_1 — угловая скорости шестерни 1. Число зубьев у шестерен пропорционально их радиусам, а линейные скорости в точке зацепления равны; следовательно,

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 r_2}{r_1} = \frac{\omega_2}{m} = \frac{2\pi n}{m}, \quad M_1 = \frac{Nm}{2\pi n} = 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Так как силы, действующие в зацеплении на каждую из шестерен, согласно третьему закону Ньютона равны между собой, то $M_2/M_1 = r_2/r_1 = 1/m$, поэтому $M_2 = M_1/m = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

1.107. Цилиндры начнут двигаться относительно друг друга без проскальзывания, если их линейные скорости v_1 и v_2 станут одинаковыми, т. е. если $v_1 = v_2 = v$. Обозначим начальную линейную скорость первого цилиндра через v_0 ; тогда $v_0 = \omega R$. Сила трения F , одинаковая для обоих цилиндров, будет первый из них тормозить, а второй ускорять. Второй закон Ньютона для этого случая дает $F = m_1(v_0 - v)/t_1$, $F = m_2 v/t_2$. Учитывая, что время t действия силы F для обоих цилиндров одно и то же, имеем $m_2 v = m_1(v_0 - v)$, откуда $v = m_1 v_0 / (m_1 + m_2)$. Чтобы найти тепловые потери, заметим, что начальная энергия системы была $m_1 v_0^2/2$, а конечная стала равной $(m_1 + m_2) v^2/2$. Разность этих величин дает количество энергии, перешедшее в тепло: $Q = m_1 m_2 \omega^2 R^2/2 (m_1 + m_2)$.

1.108. Ускорение a_1 бруска, соскальзывающего с наклонной плоскости, определяем с помощью второго закона Ньютона: $a_1 = g(\sin \alpha - k \cos \alpha)$. Движение обруча сложнее. Во-первых, каждая его точка движется вниз по наклонной плоскости с ускорением a_2 и, кроме того, вращается вокруг оси обруча. Так как обруч скатывается без проскальзывания, скорость его поступательного движения v_n и линейная скорость вращения вокруг оси v_a в каждый момент равны между собой. Действительно, представим себе, что обруч совершил один полный оборот. Тогда его центр масс пройдет вдоль наклонной плоскости пусть $2\pi R$, а любая точка обруча повернется вокруг центра масс на угол 2π , т. е. пройдет вдоль обруча путь $2\pi R$. Эти пути равны и проходятся за одинаковое время, поэтому $v_n = v_a = v$. Согласно закону сохранения энергии

$$mgh = mv_n^2/2 + mv_a^2/2 = mv^2$$

(работа против силы трения не совершается, так как скорость нижней точки равна нулю). Из кинематики следует, что $h = (a_2 t^2/2) \sin \alpha$, $v = a_2 t$. Из этих соотношений находим $a_2 = (g/2) \sin \alpha$. Тела не будут обгонять друг друга, если $a_1 = a_2$, отсюда $k = (1/2) \tan \alpha$.

Законы сохранения энергии и импульса

1.109. $l = l_0 + (l_0^2 + 2l_0H)^{1/2} = 0,66 \text{ м.}$

1.110. Пусть x — сжатие пружины в некоторый момент времени. По закону сохранения энергии $mv^2/2 = mg(H - l + x) - kx^2/2$. Максимальную скорость шарик имеет при сжатии x_0 , которое находится из условия $kx_0 = mg$. Учитывая это, находим $v_{\max} = [2g(H - l) + mg^2/k]^{1/2}$.

1.111. $a = (2H/l - 1)g = 19g$.

1.112. Вес пилота по определению есть сила его давления на опору (т. е. кресло). По третьему закону Ньютона с такой же по модулю, но противоположно направленной силой опора действует на пилота. Векторная сумма этой силы N и силы тяжести mg сообщает пилоту ускорение a , равное ускорению самолета (рис. 1.108). Вес пилота P равен по модулю силе $N = [(mg)^2 + (ma)^2]^{1/2}$. Ускорение самолета меняется в процессе торможения. Максимальное ускорение самолет имеет при максимальном растяжении каната, т. е. непосредственно перед остановкой. При этом $a = kl/M$, где k — жесткость каната, M — масса самолета. Из закона сохранения энергии следует, что $kl^2/2 = Mv^2/2$, откуда $k = M(v/l)^2$, $a = v^2/l$. Из этих соотношений определяем максимальный вес пилота:

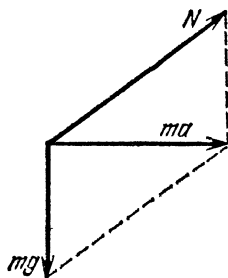


Рис. 1.108.

$$P_{\max} = m(g^2 + v^4/l^2)^{1/2} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

1.113. $T_{\max} = mg + v(km)^{1/2} \approx 10^5 \text{ Н.}$

1.114. Обозначим массу выброшенного топлива через m . По закону сохранения импульса системы ракета — топливо имеем

$$Mv = (M - m) \cdot 1,1v + m(v - 3v), \quad m/M = 0,032 = 3,2 \, \%.$$

1.115. Чистое вращение будет наблюдаться в системе координат, связанной с центром масс. Скорость центра масс определяем из закона сохранения импульса: $mv_0 = 6mv_C$, $v_C = v_0/6$. Так как массы на концах штанги отличаются в два раза, центр масс делит штангу в отношении 1 : 2.

1.116. На основании закона сохранения импульса имеем $m_1v_1 = m_2v_2$, где v_2 — скорость тележки, v_1 — скорость человека относительно земли. Но $v_1 = (L - l)/t$, $v_2 = l/t$, где t — время, за которое человек прошел по тележке. Подставляя эти значения v_1 и v_2 в исходное уравнение, получим $l = m_1L/(m_1 + m_2) = 1 \text{ м.}$ Центр масс всей системы остается неподвижным.

1.117. $v = [(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2]^{1/2}/(m_1 + m_2)$. Эта скорость образует с первоначальным направлением движения доски угол α , причем $\operatorname{tg} \alpha = m_2v_2/m_1v_1$.

1.118. Центр масс системы цистерна — вода — груз по горизонтали сдвигаться не может, так как силы в этом направлении не действуют. Вначале, пока груз не достиг воды, расстояние x центра масс системы от центра платформы находится из условия $(M + m)x = m_0(l - x)$:

$$x = m_0l/(M + m + m_0).$$

Когда груз плавает в воде, вытесненная им вода (масса которой равна массе груза) равномерно распределится по всей поверхности и центр масс всей

системы будет совпадать с центром цистерны. Следовательно, цистерна должна переместиться на расстояние x в сторону груза.

Теперь о механизме явления. Когда груз входит в воду, он «расталкивает» ее, посылая через нее импульсы давления во все стороны. Но до ближайшей к грузу, например правой, стенки импульс дойдет быстрее и даст цистерне толчок вправо. Когда до противоположной стенки импульс тоже дойдет, цистерна получит толчок влево и остановится. Так как импульсы могут частично отражаться, то окончательное положение цистерны может установиться не сразу, а после нескольких колебаний.

1.119. Найдем скорость v второго осколка сразу после разрыва. По закону сохранения импульса имеем

$$mv_0 = -mv_0/2 + mv/2, \quad v = 3v_0.$$

Итак, горизонтальная скорость осколка возросла в три раза, а время полета до места падения осталось неизменным. Значит, дальность его полета возрастет в три раза, и осколок упадет на расстоянии $4a$ от орудия.

1.120. Начальную скорость v_0 маятника можно определить из закона сохранения импульса: $v_0 = mv/(M+m)$. Высоту h , на которую поднимется маятник после соударения с пулей (рис. 1.109), найдем из закона сохранения энергии:

$$(M+m)v_0^2/2 = (M+m)gh, \quad \text{откуда} \quad h = v_0^2/2g.$$

Теперь легко определить угол α :

$$\cos \alpha = 1 - \frac{h}{l} = 1 - \frac{m^2 v^2}{(M+m)^2 \cdot 2gl}.$$

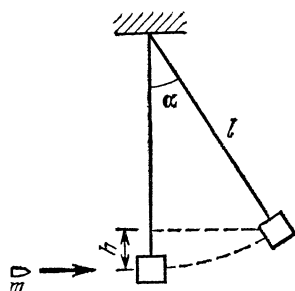


Рис. 1.109.

1.121. Скорость коробки после пробивания ее пулей можно найти из закона сохранения импульса: $v = mv_0/2M$. Полученная ею кинетическая энергия расходуется на работу против силы трения. Коробка упадет со стола, если $Mv^2/2 > kMgl$, откуда $k < m^2 v_0^2/8M^2 gl = 0,375$.

1.122. Так как при соударении тела обмениваются импульсами, закон сохранения импульса автоматически выполняется. Кинетические энергии частиц

$$K_1^0 = p^2/2m, \quad K_2^0 = p^2/16m \quad \text{до соударения;}$$

$$K_1 = p^2/8m, \quad K_2 = p^2/4m \quad \text{после соударения.}$$

По закону сохранения энергии $K_1^0 + K_2^0 = K_1 + K_2 + Q$, где Q — потерянная при соударении механическая энергия. Подставляя значения K , получаем $Q = 3p^2/16m$.

1.123. $m_2 = 5m_1/3$.

1.124. По закону сохранения импульса $m\mathbf{v} = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2/2$. Это векторное равенство можно заменить двумя скалярными, проектируя векторы на оси x и y (рис. 1.110):

$$mv = mv_1 \cos \alpha + (mv_2/2) \cos \beta,$$

$$0 = mv_1 \sin \alpha - (mv_2/2) \sin \beta.$$

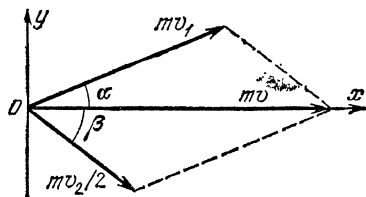


Рис. 1.110.

При упругом соударении выполняется закон сохранения энергии:

$$mv^2/2 = mv_1^2/2 + mv_2^2/4.$$

Решая совместно эти уравнения, находим скорость второй частицы: $v_2 = 2v/\sqrt{3} = 1,17v$, которая направлена под углом $\beta = \arcsin(1/2) = 30^\circ$.

1.125. Скорость v_0 шарика m_1 до соударения можно найти из соотношения $v_0^2 = 2gh = 2g(l_1 - l_1 \cos \alpha) = gl_1$ (где $\alpha = 60^\circ$). Так как в момент соударения шариков на них никакие внешние силы в горизонтальном направлении не

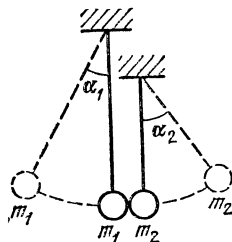


Рис. 1.111.

действуют, то справедлив закон сохранения импульса: $m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$. Воспользовавшись законом сохранения энергии, имеем $m_1 v_0^2/2 = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$. Из этих соотношений получим

$$v_1 = (m_1 - m_2) v_0 / (m_1 + m_2), \quad v_2 = 2m_1 v_0 / (m_1 + m_2).$$

Так как $m_1 < m_2$, то направление скорости v_1 противоположно направлению скорости v_0 . Иными словами, после соударения шарик m_1 отскочит назад и поднимется на высоту $h_1 = v_1^2/2g$. Высота подъема второго шарика $h_2 = v_2^2/2g$. Углы α_1 и α_2 (рис. 1.111), на которые отклоняются первый и второй шарик после соударения, легко определяются: $\cos \alpha_1 = 1 - h_1/l_1$, $\cos \alpha_2 = 1 - h_2/l_2$. Подставляя выражения для h и l , получим

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}, \quad \cos \alpha_2 = 1 - \frac{2m_1^2 l_1}{l_2 (m_1 + m_2)^2}.$$

1.126. Так как импульсы p всех шаров после соударения одинаковы, то до соударения с третьим шаром импульс второго шара должен быть равен $2p$. Запишем закон сохранения энергии при соударении второго и третьего шаров: $(2p)^2/2m_2 = p^2/2m_2 + p^2/2m_3$, откуда $m_3 = m_2/3$.

Импульс первого шара до соударения со вторым равен $3p$; по закону сохранения энергии

$$(3p)^2/2m_1 = p^2/2m_1 + (2p)^2/2m_2, \quad \text{откуда} \quad m_2 = m_1/2$$

и, следовательно, $m_3 = m_1/6$. Высоты подъема найдем, пользуясь законом сохранения энергии:

$$m_1 g H = (3p)^2/2m_1, \quad m_1 g H_1 = p^2/2m_1,$$

откуда $H_1 = H/9$. Аналогично находим $H_2 = 4H/9$, $H_3 = 4H$.

1.127. $Q = (1/16) mg (3H - 5h + 2\sqrt{Hh})$.

1.128. Если удерживать один из шариков, вся потенциальная энергия пружины перейдет в кинетическую энергию отпущенного шара: $m_1 v_0^2/2 = kx^2/2$. Если шарики отпустить одновременно, они разлетаются в противоположные стороны так, что суммарный импульс равен нулю: $m_1 v_1 = m_2 v_2$, а энергия пружины сообщает кинетическую энергию обоим шарам: $m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 = kx^2/2$. Из этих соотношений находим

$$v_1 = v_0 \sqrt{m_2/(m_2 + m_1)}, \quad v_2 = v_0 \sqrt{m_1^2/(m_2 + m_1) m_2}.$$

1.129. Учитывая, что при неупругом соударении с пластилином выполняется закон сохранения импульса, находим новую амплитуду колебаний: $A = A_0 \sqrt{M/(M + m)}$.

1.130. Так как массы шариков равны, третий шарик после соударения останавливается, а второй приобретает скорость v_0 . Мы предполагаем при этом, что время соударения шарика мало по сравнению с временем деформации пружины. Но после удара, по мере того как второй шарик движется влево,

пружина деформируется и через нее движение передается первому шарiku. Так как на систему шариков не действуют внешние силы, центр масс системы движется с постоянной скоростью $v = mv_0/2m = v_0/2$. Пружина при движении колеблется. Амплитуду этих колебаний можно найти из закона сохранения энергии:

$$kA^2/2 = mv_0^2/2 - 2m(v^2/2), \quad A = v_0 \sqrt{m/2k}.$$

Максимальное и минимальное расстояния между шариками равны

$$l_{\max} = l + A = l + v_0 \sqrt{m/2k}, \quad l_{\min} = l - A = l - v_0 \sqrt{m/2k}.$$

1.131. Пусть после последнего соударения скорости гирь равны u_1 и u_2 , а скорость бусинки равна v . Так как $m \ll M$, скорость в результате одного соударения с бусинкой меняется незначительно, поэтому $u_1 \approx u_2 = u$. Соударения прекратятся, если $v < u$. Применим закон сохранения энергии:

$$mv_0^2/2 = Mu_1^2/2 + Mu_2^2/2 + mv^2/2,$$

откуда, учитывая, что $m \ll M$, а $u_1 \approx u_2 \approx u \approx v$, получаем $u = v_0(m/2M)^{1/2} = 22$ см/с.

С помощью закона сохранения импульса можно вычислить разность скоростей гирь $u_2 - u_1$:

$$mv_0 = Mu_2 - Mu_1 - mv,$$

откуда $u_2 - u_1 \approx (m/M)v_0 = 1$ см/с. Мы убедились, что действительно $u_2 - u_1 \ll u$, и наше приближенное решение вполне справедливо.

1.132. Выясним, перевалит ли тело m через вершину горки. Если не перевалит, то в какой-то момент скорости тела и горки будут одинаковы. Из законов сохранения энергии и импульса найдем высоту H_1 , до которой поднимется тело m по горке:

$$mv_0^2/2 = (m+M)v^2/2 + mgH_1, \quad mv_0 = (m+M)v,$$

откуда $H_1 = v_0^2 M/2g(m+M) = 1,04$ м. Так как $H_1 < H$, тело не перевалит горку, а, поднявшись на высоту H_1 , скатится назад.

Обозначив конечную скорость тела через v_1 , а горки через v_2 , снова используем законы сохранения энергии и импульса:

$$mv_0^2/2 = mv_1^2/2 + Mv_2^2/2, \quad mv_0 = mv_1 + Mv_2.$$

Решая эту систему уравнений, находим два возможных решения задачи:

$$v_1 = v_0, \quad v_2 = 0 \quad \text{и} \quad v_1 = -v_0 \frac{M-m}{M+m}, \quad v_2 = v_0 \frac{2m}{m+M}.$$

Первое решение годится для случая, когда тело перевалило горку. В нашем случае реализуется второе решение. Подставляя числовые значения величин, получаем $v_1 = -3,33$ м/с, $v_2 = 1,67$ м/с.

1.133. $v_{\min} = [2gH(M+m)/M]^{1/2} = 6,9$ м/с.

1.134. $l = L + t(2gH)^{1/2}$.

1.135. В конце спуска мешок имеет скорость $v_0 = (2gH)^{1/2}$. Разложим ее на вертикальную и горизонтальную составляющие: $v_v = v_0 \sin \alpha$, $v_r = v_0 \cos \alpha$. Мешок не подпрыгивает при ударе о пол (неупругое взаимодействие). Значит, вертикальная составляющая импульса мешка обращается в нуль под действием силы реакции опоры. Если средняя сила реакции равна N , а время соударения равно t , то импульс силы реакции за время удара $Nt = mv_0 \sin \alpha$. Так как

мешок имеет горизонтальную составляющую скорости, он движется во время удара и на него действует сила трения $F_{\text{тр}} = kN$. Таким образом, сила трения $F_{\text{тр}}$, так же как и сила реакции N , имеет характер ударной силы. Импульс этой силы за время удара $F_{\text{тр}} t = kNt = kmv_0 \sin \alpha \approx 0,6mv_0$, а начальный горизонтальный импульс мешка $mv_0 \cos \alpha = 0,5mv_0$. Следовательно, горизонтальная составляющая скорости мешка обратится в нуль раньше, чем вертикальная. Сила трения при этом тоже обращается в нуль, и мешок остановится сразу же у края доски.

1.136. $l = H (\sin \alpha - k \cos \alpha) (\cos \alpha - k \sin \alpha) / k \sin \alpha = 0,25 m$.

1.137. В направлении, перпендикулярном к плоскости стены, происходит упругое соударение, и нормальная компонента скорости шарика изменяет знак. Импульс силы нормального давления за время удара $I = 2mv \cos \varphi$. Максимальный импульс силы трения за это же время $I_{\text{тр max}} = kI = 2kmv \cos \varphi$. С другой стороны, должно быть $I_{\text{тр max}} \geq mv \sin \varphi$. Шарик отскочит перпендикулярно, если $\tan \varphi \leq 2k$.

1.138. В системе координат, связанной с конусом, молекулы налетают на поверхность конуса под углом 30° к нормали со скоростью v и отскакивают с той же по модулю скоростью под углом 60° к первоначальному направлению. В неподвижной системе координат скорость отскачившей молекулы, как видно из рис. 1.112, $v_0 = v\sqrt{3}$. Число молекул, соударяющихся в единицу времени с конусом, $N = \pi H^2 \tan^2 60^\circ \cdot nv = 3\pi H^2 v$. Энергия этих молекул

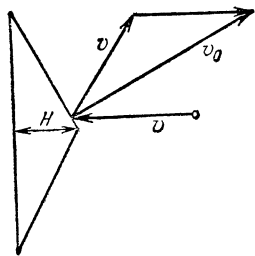


Рис. 1.112.

$$K = Nmv_0^2/2 = (9\pi/2) nmv^3 H^2 = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

1.139. Рассмотрим соударение молекулы с поршнем в системе координат, связанной с поршнем. В этой системе скорость молекулы равна $v - u$. После упругого соударения молекула отскакивает от поршня с той же по модулю скоростью, но направленной в противоположную сторону (так как масса поршня бесконечно велика по сравнению с массой молекулы). В неподвижной системе координат скорость отскачившей молекулы $v_1 = -(v - u) + u = -v + 2u$. Следовательно, кинетическая энергия ее изменилась на величину

$$\Delta K = \frac{m \cdot (2u - v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2 \cdot 4u^2}{2} - \frac{m \cdot 4uv}{2} \approx -2mu v.$$

Так как $u \ll v$, то $u^2 \ll uv$ и первым членом можно пренебречь. Относительная часть теряемой энергии равна, таким образом, $|\Delta K|/K = 4u/v$.

1.140. Шарик может удариться о каждую ступеньку длинной лестницы только в случае, если каждый раз перед соударением он имеет одну и ту же скорость и ударяется в то же место ступеньки. При этом горизонтальная составляющая скорости шарика не меняется при соударении, а изменение вертикальной составляющей компенсируется за счет работы силы тяжести при падении на следующую ступеньку. Отсюда скорость шарика $v = (2gh/\alpha)^{1/2} = 2 \text{ м/с}$.

Время полета между двумя соударениями $t = l/v \sin \varphi$. Начальная вертикальная составляющая скорости после отскока v_v находится из условия $(v \cos \varphi)^2 - v_v^2 = \alpha v^2$. По вертикали шарик проходит за время t путь $h = v_v t - gt^2/2$.

Из этих соотношений получаем уравнение

$$-\frac{h}{l} = \frac{(\cos^2 \varphi - \alpha)^{1/2}}{\sin \varphi} - \frac{l}{h} \frac{\alpha}{4 \sin^2 \varphi}.$$

Подставляя в него числовые значения α , l и h , находим два решения:

$$\varphi_1 = 45^\circ, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = 1/3 \quad (\text{или } \sin \varphi_2 = 1/\sqrt{10}).$$

Первое решение, очевидно, не удовлетворяет условию, так как при этом получается полная потеря вертикальной составляющей скорости при соударении. Второе решение дает $\varphi = 18,5^\circ$.

$$1.141. \quad v \approx v_0 [1 - 4(u/v_0) \cos^2 \varphi]^{1/2} = 720 \text{ м/с.}$$

Вращательное движение

1.142. Качение можно представить как сумму двух движений: поступательного движения центра обруча и вращения относительно центра. При этом в отсутствие проскальзывания скорость в нижней точке обруча равна нулю; следовательно, скорости поступательного и вращательного движений одинаковы по модулю (в нижней точке эти скорости направлены в разные стороны). Обозначим эти скорости через v . Из закона сохранения энергии получаем $mgh = 2mv^2/2$, $v = (gh)^{1/2}$.

В точке A скорости поступательного и вращательного движений взаимно перпендикулярны (рис. 1.113). Результирующая скорость направлена под углом 45° к горизонту и равна $v_A = (2gh)^{1/2}$. Аналогичным образом для точки B найдем $v_B = 2(gh)^{1/2}$. Так как поступательное движение обруча по горизонтальной плоскости происходит с постоянной скоростью, ускорения точек A и B направлены к центру обруча и равны по модулю: $a_A = a_B = v^2/r = gh/r$.

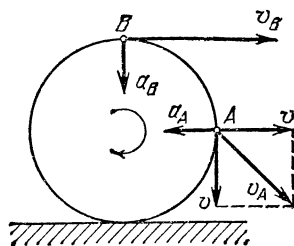


Рис. 1.113.

1.143. На грузы m_1 и m_2 , движущиеся по окружности, действует только сила натяжения нити T . Так как грузы движутся с центростремительными ускорениями $\omega^2 r_1$ и $\omega^2 r_2$, то можно написать на основании второго закона Ньютона $m_1 \omega^2 r_1 = T$, $m_2 \omega^2 r_2 = T$, откуда $m_1 r_1 = m_2 r_2$. Воспользовавшись этим уравнением и условием $r_1 + r_2 = l$, найдем

$$r_1 = lm_2/(m_1 + m_2), \quad r_2 = lm_1/(m_1 + m_2).$$

Найденные значения r_1 и r_2 соответствуют положению неустойчивого равновесия. В положении равновесия сила натяжения нити и кинетическая энергия грузов

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 l,$$

$$K = K_1 + K_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \omega^2 l^2.$$

1.144. Так как груз движется в горизонтальной плоскости, то его ускорение, а следовательно, и действующая на него сила (равнодействующая силы тяжести mg и силы натяжения нити N) направлена по горизонтальной

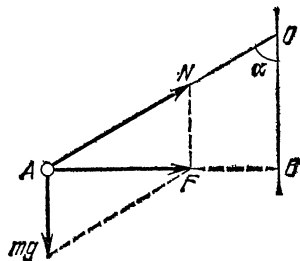


Рис. 1.114.

линии AB (рис. 1.114). Очевидно, что $F = m\omega^2 R$, где ω — угловая скорость, $R = AB$, m — масса груза. Учитывая, что $F = mg \tan \alpha$, $\omega = 2\pi/T$, $R = L \sin \alpha$, получим, что период $T = 2\pi [(L/g) \cos \alpha]^{1/2}$.

1.145. $\omega = [g \tan \alpha / (L \sin \alpha + d)]^{1/2} = 8,3$ рад/с.

1.146. Если при вращении вала груз остается висеть вертикально, то сила натяжения штанги не изменится и будет равна силе тяжести груза. Если же груз отклонится из положения равновесия на угол α (рис. 1.115), то возможно равновесие при условии $m\omega^2 L \sin \alpha = mg \tan \alpha$, или $\cos \alpha = g/\omega^2 L$; любое другое положение равновесия штанги будет неустойчивым. Так как $\cos \alpha \leq 1$, груз может отклоняться лишь при $\omega > (g/L)^{1/2} = 3$ рад/с. Следовательно, при

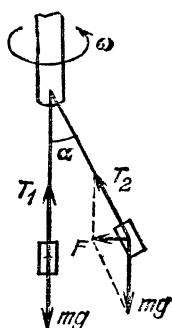


Рис. 1.115.

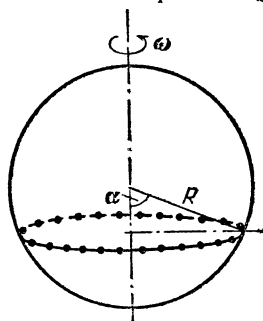


Рис. 1.116.

$\omega_1 = 2$ рад/с груз отклониться не может и $T = T_1 = 100$ Н. При $\omega_2 = 4$ рад/с груз отклонится, так как вертикальное положение штанги соответствует неустойчивому положению равновесия, а отклонение — устойчивому (почему?). При этом $T = T_2 = mg/\cos \alpha = m\omega_2^2 L = 160$ Н.

1.147. Если $\omega \leq (g/R)^{1/2}$, песчинки останутся лежать на дне. Если $\omega > (g/R)^{1/2}$, песчинки будут находиться на окружности, такой (рис. 1.116), что $\cos \alpha = g/\omega^2 R$.

1.148. На автомобиль действуют сила тяжести mg и сила реакции моста N , равная по модулю силе давления автомобиля на мост (третий закон Ньютона). Поэтому второй закон Ньютона сразу дает $mg - N = mv^2/R$, где v^2/R — центростремительное ускорение. Так как по условию $N = mg/2$, то $R = 2v^2/g = 127$ м.

1.149. В момент отрыва давление купола на тело равно нулю; следовательно, единственной действующей на тело силой будет сила тяжести mg . Пусть тело отрывается в точке A (рис. 1.117); тогда $mg \cos \alpha = mv^2/R$, где v — скорость тела в точке A . Нетрудно видеть, что $v^2 = 2gR(1 - \cos \alpha)$. Из этих соотношений следует, что $\cos \alpha = 2/3$, $h = R \cos \alpha = 2R/3$.

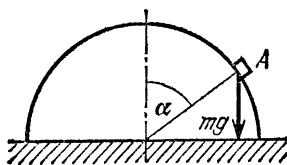


Рис. 1.117.

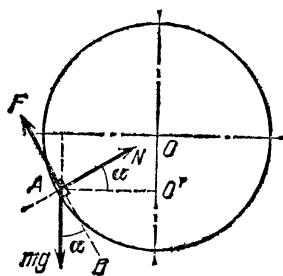


Рис. 1.118.

1.150. На шайбу действуют (рис. 1.118): N — сила реакции шара, равная по модулю силе давления шайбы на шар; F — сила трения, касательная к поверхности шара; mg — сила тяжести шайбы. Максимальная сила трения $F = kN$, где k — коэффициент трения. Шайба вращается вокруг вертикальной оси. На основании второго закона Ньютона сумма проекций всех сил на горизонталь-

ную плоскость AO' будет создавать центростремительное ускорение $\omega^2 R \cos \alpha$, т. е. $N \cos \alpha - F \sin \alpha = m \omega^2 R \cos \alpha$. Так как шайба относительно поверхности шара покоится, то сумма проекций всех сил на вертикаль должна равняться нулю: $mg - F \cos \alpha - N \sin \alpha = 0$. Из этих соотношений находим

$$k = \cos \alpha (g - \omega^2 R \sin \alpha) / (g \sin \alpha + \omega^2 R \cos^2 \alpha).$$

1.151. а) Закон сохранения энергии сразу дает $mv^2/2 = 2mgL$, где L — длина штанги, v — искомая скорость, m — масса маятника. Отсюда $v = 2(gL)^{1/2}$.

б) Этот случай отличается от предыдущего тем, что при прохождении маятником высшей точки своей траектории нить должна быть натянута. В этот момент на маятник будут действовать сила тяжести mg и сила натяжения нити T , направленные вертикально вниз (рис. 1.119). Сумма этих сил сообщает маятнику центростремительное ускорение v_1^2/L , где v_1 — скорость маятника в точке B . В предельном случае $T = 0$ и $mg = mv_1^2/L$. При меньших значениях v_1 маятник не достигает точки B и пройдет под ней (штриховая линия на рис. 1.119). Из закона сохранения энергии следует $mv^2/2 = 2mgL + mv_1^2/2$. Подставляя выражение для скорости v_1 , получаем $v = (5gL)^{1/2}$.

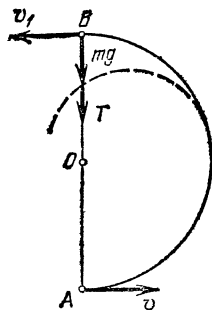


Рис. 1.119.

1.152. $T = 6mg$.

1.153. Скорость шарика можно найти по закону сохранения энергии:

$$mgl = mv_B^2/2 + mg(l - h), \quad v_B^2 = 2gh.$$

Так как сила тяжести в точке B направлена по касательной к траектории, центростремительное ускорение сообщает шарiku только сила натяжения нити. Поэтому $T = mv_B^2/(l - h) = 4mg$.

1.154. $\omega = (g/l)^{1/2}$.

1.155. $v = (Rg)^{1/2} = 2 \text{ м/с}$.

1.156. Пусть H — минимальная высота, скатываясь с которой тележка сможет пройти мертвую петлю. Тогда сила давления тележки на рельсы в точке O будет равна нулю (рис. 1.120). (Если сила давления на рельсы обратится в нуль в любой другой точке, то тележка в этой точке сорвется и не сможет пройти всей петли.) Значит, в точке O на тележку действует сила тяжести, сообщая ей центростремительное ускорение: $mg = mv_0^2/R$, где R — радиус петли, m — масса тележки, v_0 — ее скорость в точке O . Воспользуемся законом сохранения энергии: $mgH = mv_0^2/2 + 2mgR$. Из этих соотношений получим $H = 5R/2$.

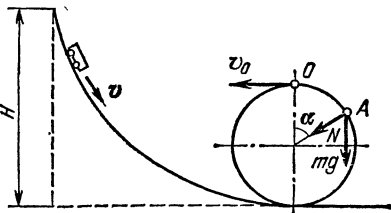


Рис. 1.120.

В точке A на тележку действуют сила тяжести и сила реакции рельсов N . Центростремительное ускорение тележки будет определяться полной силой, действующей в направлении радиуса петли:

$$mg \cos \alpha + N = mv^2/R.$$

Скорость v тележки в точке A можно найти из закона сохранения энергии:

$$mgH = mv^2/2 + mgR(1 + \cos \alpha).$$

Выражая из этих соотношений N , получим $N = 3mg(1 - \cos \alpha)$. Если $\alpha = 0$, то $N = 0$ в соответствии с условием задачи.

1.157. $a = g\sqrt{10}$, $H = 3R/2$ (см. решение задачи 1.156).

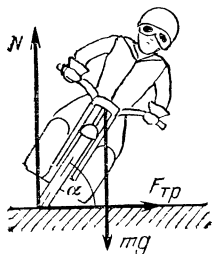


Рис. 1.121.

1.158. На мотоциклиста действуют сила тяжести mg , сила реакции опоры N и сила трения $F_{тр}$, сообщающая ему необходимое для поворота центростремительное ускорение (рис. 1.121). Легко видеть, что $N = mg$, $F_{тр} = kN$, $F_{тр} = mv^2/R$. Равенство моментов сил N и $F_{тр}$ относительно центра масс O дает $F_{тр} \sin \alpha = N \cos \alpha$. Из этих соотношений получаем $\operatorname{ctg} \alpha = k = 0,4$, $v = (Rgk)^{1/2} = 18,8$ м/с. Мотоциклист отклонится от вертикали на угол $\beta = \pi/2 - \alpha \approx 22^\circ$.

1.159. $v_1/v = [(k + \operatorname{tg} \alpha)/(1 - k \operatorname{tg} \alpha)]^{1/2}$ (см. решение задачи 1.158).

1.160. $k \geq (v - 2\pi nR)^2/gR = 0,4$.

1.161. Коэффициент трения $k = v^2/gR$ (см. решение задачи 1.158). Силы, действующие на мотоциклиста при движении по стенке цилиндра, указаны на рис. 1.122. По определению $F_{тр} = kN$. Мотоциклист не будет соскальзывать вниз по стенке, если $F_{тр} = mg$. Так как в данном случае сила реакции стенки N есть центростремительная сила, то $N = mv_1^2/R_1$. Эти соотношения дают $v_1^2 = R_1 g/k = R_1 R g^2/v^2$. Чтобы мотоцикл не опрокидывался, необходимо равенство моментов сил N и $F_{тр}$ относительно центра масс O :

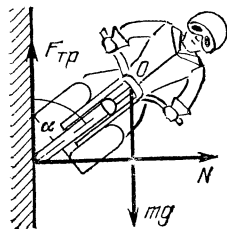


Рис. 1.122.

$F_{тр} d \sin \alpha = N d \cos \alpha$, где d — расстояние от точки касания до центра масс. Окончательно имеем $\operatorname{ctg} \alpha = k = v^2/Rg$.

1.162. $v = [2kgR \sin(\alpha/2)]^{1/2} = 20$ м/с = 72 км/ч.

1.163. Максимальное ускорение, которое может развивать автомобиль, определяется силой трения: $a = F_{тр}/m = kg$. В данном случае полное ускорение автомобиля есть векторная сумма нормального (центростремительного) ускорения a_n и тангенциального ускорения a_t (рис. 1.123). Нормальное ускорение определяется формулой $a_n = v^2/R$ и достигает своего максимального значения в конце пути, когда скорость максимальна. Тангенциальное ускорение a_t по условию задачи постоянно. Следовательно, скорость, которую будет иметь автомобиль в конце разгона, $v = (2a_t l)^{1/2}$, где $l = \pi R/6$, и, следовательно, $a_t = 3v^2/\pi R$. Учитывая, что $a^2 = a_n^2 + a_t^2$, и подставляя в это соотношение значения

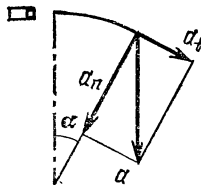


Рис. 1.123.

a , a_n и a_t , получим $v = \left[\frac{kgR}{(1 + (3/\pi)^2)^{1/2}} \right]^{1/2} = 14,6$ м/с = 53 км/ч.

1.164. Разложим ускорение тела в точке C на тангенциальную и нормальную составляющие (рис. 1.124). Тангенциальное ускорение создается проекцией силы тяжести: $a_t = g \cos \alpha$. Нормальное (центростремительное) ускорение со-

здается реакцией опоры и проекцией силы тяжести и определяется скоростью тела в точке C : $a_n = v_C^2/R$. Скорость v_C можно найти из закона сохранения энергии:

$$mv^2/2 = mgh + mv_C^2/2, \\ v_C^2 = v^2 - 2gR(1 - \cos \alpha).$$

Полное ускорение тела в точке C равно $a_C = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2} = 94 \text{ м/с}^2$. Направление ускорения образует с радиусом, проведенным в точку C , угол β такой, что $\text{tg } \beta = a_t/a_n = 0,0735$, откуда $\beta \approx 4^\circ$.

1.165. $a = [(g \sin \alpha)^2 + (2gH_1/R)^2]^{1/2} = 63 \text{ м/с}^2$, где $H_1 = H - R(1 - \cos \alpha)$.

1.166. Рассмотрим силы, действующие на санки в точке A (рис. 1.125). Так как $a = g$, а угол $\alpha = 60^\circ$, то $N = mg$. Сумма проекций сил N и mg на направление радиуса окружности образует центростремительную силу:

$$mv_A^2/R = N - mg \cos \alpha, \text{ откуда } v_A^2 = gR/2.$$

Высота точки A $h = R(1 - \cos \alpha) = R/2$. Путь санок находим из закона сохранения энергии: $l = h/k + v_A^2/2kg = 3R/4k = 50 \text{ м}$.

1.167. $h = (2kl - R)/3 = 2,7 \text{ м}$.

1.168. $R = l_0/2 + (l_0^2/4 + l_0 v^2/g)^{1/2}$.

1.169. На муфту действуют силы (рис. 1.126): $F = k(l - l_0)$ — сила упругости пружины, mg — сила тяжести муфты, N — сила реакции со стороны стержня. Поскольку в установившемся режиме муфта вращается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью, сумма всех действующих на нее сил должна быть центростремительной силой, направленной по радиусу окружности. Следовательно, сумма проекций всех сил на вертикаль должна быть равна нулю:

$$N \sin \alpha - mg - k(l - l_0) \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$N = mg/\sin \alpha + k(l - l_0) \cos \alpha/\sin \alpha.$$

Рассмотрим теперь сумму проекций всех сил на радиус окружности, описываемой муфтой:

$$F_1 = k(l - l_0) \sin \alpha + N \cos \alpha = \\ = mg \cos \alpha/\sin \alpha + k(l - l_0)/\sin \alpha.$$

Как уже было сказано, эта сила в установившемся режиме должна являться центростремительной силой: $F_2 = m\omega^2 l \sin \alpha$. Равновесное значение l найдется из равенства $F_1 = F_2$:

$$l = (kl_0 - mg \cos \alpha)/(k - m\omega^2 \sin^2 \alpha).$$

Исследуем, является ли найденное положение муфты устойчивым. Для этого построим графики $F_1(l)$ и $F_2(l)$ (рис. 1.127). Это прямые линии, одна из которых (F_2) всегда проходит через начало координат; ее наклон задается

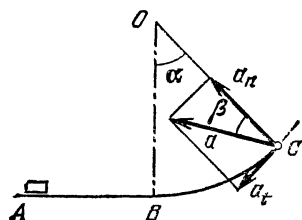


Рис. 1.124.

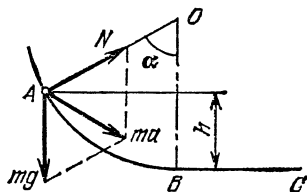


Рис. 1.125.

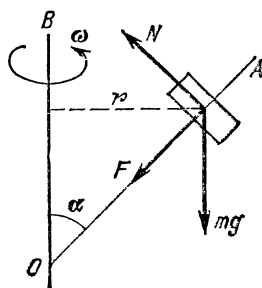


Рис. 1.126.

условием $\operatorname{tg} \gamma = m\omega^2 \sin \alpha$. Расположение и наклон второй прямой (F_1) зависит от параметров системы:

$$\operatorname{tg} \beta = k/\sin \alpha, \quad F_1(0) = (mg \cos \alpha - kl_0)/\sin \alpha.$$

Положение равновесия определяется точкой пересечения $F_1(l)$ и $F_2(l)$. Возможны два типа пересечения этих прямых, изображенные на рис. 1.127. Случай а) соответствует положению устойчивого равновесия. Если l немного увеличится, F_1 возрастет больше, чем необходимо для устойчивого вращения, и система вернется к исходному положению. Точно так же, если l уменьшится, F_1 окажется меньше, чем F_2 , и радиус окружности будет возрастать, т. е. система и в этом случае вернется в положение равновесия. Из тех же соображений видно, что случай б) соответствует положению неустойчивого равновесия. Как видно из рис. 1.127, случай а) реализуется при выполнении двух условий:

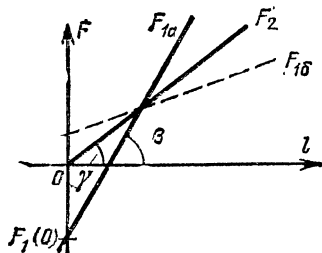


Рис. 1.127.

$$mg \cos \alpha / \sin \alpha - kl_0 / \sin \alpha < 0,$$

$$\text{или } kl_0 > mg \cos \alpha,$$

и

$$k/\sin \alpha > m\omega^2 \sin \alpha, \quad \text{или } \omega < \sqrt{k/m} / \sin \alpha.$$

Таким образом, муфта имеет устойчивое положение равновесия на штанге лишь при выполнении этих условий. Заметим, в заключение, что в данной задаче не учитываются силы трения и, следовательно, любые возмущения равновесного режима не должны затухать. Различие между положениями устойчивого и неустойчивого равновесия проявится в следующем: при малом смещении муфты из устойчивого положения равновесия она будет в дальнейшем совершать малые колебания около этого положения; при малом смещении из неустойчивого положения муфта уйдет далеко и никогда не вернется в положение, близкое к равновесному.

1.170. $\omega = \sqrt{2k/m}$. Шайба может находиться в положении безразличного равновесия в любой точке стержня.

1.171. Так как система шарик — сфера изолирована, ускорение у центра масс системы отсутствует. Следовательно, вращение происходит вокруг центра масс. Расстояние центра масс от центра сферы R находится из условия $MR = m(a - R)$, откуда $R = ma/(m + M)$. Сила, с которой шарик давит на сферу, равна (по третьему закону Ньютона) силе, с которой сфера действует на шарик. Эта сила сообщает шарiku центростремительное ускорение и, следовательно,

$$F = m\omega^2(a - R) = 4\pi^2 mMa/(m + M) T^2.$$

Тяготение. Спутники

1.172. Спутник будет казаться неподвижным, если он будет вращаться вокруг земной оси с той же угловой скоростью, что и Земля. Единственная сила, которая действует на спутник, — сила притяжения Земли; она и сообщает ему необходимое ускорение:

$$m\omega^2 R = GmM_3/R^2, \quad \omega = \omega_3 = 2\pi/T_3, \quad T_3 \approx 24 \text{ ч},$$

где G — гравитационная постоянная. Массу Земли M_3 удобно выразить через ускорение свободного падения на ее поверхности: $mg = GmM_3/R_3^2$, откуда $GM_3 = gR_3^2$. Используя эти соотношения, получаем $R/R_3 = (gT_3^2/4\pi^2 R_3)^{1/3} \approx 6,7$.

1.173. Спутник может либо обгонять вращение Земли, либо отставать от него. Поэтому возможны два решения задачи:

а) Спутник вращается быстрее Земли: $\omega > \omega_3$. Тогда $(\omega - \omega_3) \cdot 2T_3 = 2\pi$, $\omega = 3\pi/T_3$. Используя решение задачи 1.172, получим $R/R_3 = (gT_3^2/9\pi^2 R_3)^{1/3} \approx 5$.

б) Спутник вращается медленнее Земли: $\omega < \omega_3$. Тогда $(\omega_3 - \omega) \cdot 2T_3 = 2\pi$, $\omega = \pi/T_3$. Соответственно получаем $R/R_3 = (gT_3^2/\pi^2 R_3)^{1/3} \approx 10,5$.

$$1.174. T = 2\pi / [(g/27R_3)^{1/2} - 2\pi/T_3] \approx 0,44 \text{ сут} = 10,5 \text{ ч.}$$

$$1.175. M_C/M_3 = (\omega_3 R_3 / \omega_L R_L)^2 = 3,5 \cdot 10^3.$$

1.176. Для станции «Марс-2» мы знаем период и длину большой оси эллипса обращения: $a_M = 2R_M + a + p = 33\,180$ км. Рассмотрим спутник, вращающийся по круговой орбите вблизи поверхности Земли. Для него можно написать $GmM_3/R_3^2 = 4\pi^2 m R_3 / T_1^2$, откуда $T_1^2 / (2R_3)^3 = \pi^2 / 2GM_3$. Очевидно, для аналогичного спутника Марса получим $T_M^2 / (2R_M)^3 = \pi^2 / 2GM_M$. По третьему закону Кеплера для спутника Марса имеем $T_M^2 / (2R_M)^3 = T^2 / a_M^3$. Используя эти соотношения, получаем $M_M/M_3 = T_1^2 a_M^3 / (2R_3)^3 T^2$. Период обращения спутника вблизи поверхности Земли находим из условия, что центростремительное ускорение в этом случае $4\pi^2 R_3 / T_1^2 = g$, откуда $T_1^2 = 4\pi^2 R_3 / g$. С учетом этого находим $M_M/M_3 = \pi^2 a_M^3 / 2R_3^2 g T^2 = 0,11$.

$$1.177. M_{Ю}/M_3 = (T_2/T_1)^2 (R_1/R_2)^3 = 320.$$

1.178. Спутник, имеющий первую космическую скорость, движется по круговой орбите вблизи поверхности Юпитера. При этом $mv^2/R_{Ю} = GmM_{Ю}/R_{Ю}^2$. Для Ганимеда $4\pi^2 R/T^2 = GM_{Ю}/R^2$. Из этих соотношений находим $v = (2\pi R/T) (R/R_{Ю})^{1/2} = 39$ км/с.

1.179. По третьему закону Кеплера $(T/T_3)^2 = (a/R_0)^3$, откуда длина большой полуоси орбиты кометы Галлея $a = R (T/T_3)^{2/3} \approx 2,7 \cdot 10^9$ км; но $2a = R_{\min} + R_{\max}$, так что $R_{\max} \approx 5,2 \cdot 10^9$ км.

1.180. После торможения спутник движется по эллиптической орбите, большая полуось которой $a = (R + R_3)/2$. Если применить законы Кеплера к движению спутника по круговой и эллиптической орбитам, получим $(T/T_0)^2 = (a/R)^3$. Период обращения спутника по круговой орбите находим из условия $4\pi^2 R/T_0^2 = GM_3/R^2$. Но $GM_3 = gR_3^2$ (см. решение задачи 1.172). Используя эти соотношения, находим период обращения спутника по эллиптической орбите:

$$T = \frac{2\pi}{R_3} \left(\frac{R^3}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{R + R_3}{2R} \right)^{3/2}.$$

С момента торможения до посадки спутник пройдет половину эллиптической орбиты. Поэтому $t = T/2 = 7,15 \cdot 10^3$ с ≈ 2 ч.

1.181. Если r_1 и r_2 — расстояния звезд от их общего центра масс, то $m_1 : m_2 = r_2 : r_1$. Принимая во внимание, что $m_1 + m_2 = 2M_C$, и обозначая расстояние между звездами через R , получим $m_2 = 2M_C r_1/R$. Так как сила их

гравитационного притяжения является для каждой звезды центробежной силой, звезды вращаются вокруг их общего центра масс; при этом $m_1 \cdot 4\pi^2 r_1 / T^2 = G m_1 m_2 / R^2$. Используя выражение для m_2 , получаем $4\pi^2 / T^2 = 2GM_C / R^3$. Для системы Солнце—Земля по аналогии можно написать $4\pi^2 / (T/2)^2 = GM / R_0^3$, где R_0 —расстояние от Земли до Солнца, а $M \approx M_C + m_3$. Из этих соотношений получаем $R = 2R_0 = 3,0 \cdot 10^8$ км.

1.182. Период колебаний маятника обратно пропорционален корню квадратному из ускорения свободного падения, т. е. в кабине корабля $g_k = g/4$. Но g_k является центробежным ускорением; поэтому

$$g_k = 4\pi^2 r_2 / T^2, \quad r_1 + r_2 = L, \quad r_2 / r_1 = 0,5, \quad r_2 = L/3.$$

Из этих соотношений получим $T = 4\pi (L/3g)^{1/2}$.

1.183. $h = R \{ T [G\rho / (G\rho T^2 - 3\pi)]^{1/2} - 1 \}.$

1.184. Пусть M_a —масса астероида. Как следует из закона всемирного тяготения, $g_a = GM_a / R_a^2$, где g_a —ускорение свободного падения на поверхности астероида. Учитывая, что $M_a = (4/3) \pi R_a^3 \rho_a$, получим $g_a = (4/3) \pi \rho_a R_a G \approx 0,8$ м/с². По условию задачи человек в момент прыжка на Земле и на астероиде обладает одной и той же кинетической энергией. Поэтому потенциальная энергия в высшей точке подъема как на Земле, так и на астероиде будет одна и та же: $mg_a h_a = mgh$, где m —масса человека, h_a —высота прыжка на астероиде, а h —высота прыжка на Земле. Итак, $h_a = hg/g_a \approx 64$ м.

1.185. Ускорение свободного падения на поверхности Солнца

$$g_C = GM_C / R_C^2 = (G/R_C^2) \cdot (4/3) \pi R_C^3 \rho_C = (4/3) \pi R_C \rho_C G,$$

где R_C —радиус Солнца, ρ_C —плотность Солнца. Для Земли по аналогии имеем $g_3 = (4/3) \pi R_3 \rho_3 G$, где R_3 —радиус Земли, ρ_3 —плотность Земли. Итак, $g_C = = g_3 R_C \rho_C / R_3 \rho_3$. Поскольку $R_C / R_3 = 108$, а $\rho_C / \rho_3 = 0,25$, окончательно получим $g_C \approx 265$ м/с².

1.186. Допустим, что земная орбита имеет форму круга. Центробежное ускорение, с которым Земля движется по орбите, определяется силой всемирного тяготения: $GM_C m / R_0^2 = m 4\pi^2 R_0 / T^2$, где M_C —масса Солнца, m —масса Земли. Ускорение свободного падения g_C на поверхности Солнца тоже дается законом всемирного тяготения: $g_C = GM_C / R_C^2$. Из этих соотношений получим $g_C = 4\pi^2 R_0^3 / R_C^2 T^2 \approx 265$ м/с².

1.187. Минимальный период обращения будет у спутника, который движется по круговой орбите вблизи поверхности звезды так, что радиус его орбиты R приблизительно равен радиусу звезды. Сила гравитационного притяжения является в этом случае центробежной силой: $GmM/R^2 = m\omega^2 R$, где масса звезды $M = (4/3) \pi R^3 \rho$. Для периода обращения $T = 2\pi/\omega$ получаем $T = (3\pi/G\rho)^{1/2} = 1,2 \cdot 10^{-3}$ с.

1.188. Вблизи поверхности Земли g является центробежным ускорением спутника: $g = v^2/R$, где R —радиус орбиты спутника. Так как $R \approx R_3$, $v = (gR_3)^{1/2} = 8$ км/с (первая космическая скорость). Изменение скорости спутника при выстреле Δv найдем по закону сохранения импульса:

$$(M + m)v = M(v + \Delta v) + m(v - u), \quad \text{откуда} \quad \Delta v = um/M.$$

После выстрела орбита спутника станет не круговой, а эллиптической. Так как изменение скорости, а следовательно, и эллиптичность орбиты малы, будем считать орбиту приблизительно круговой и вычислим, насколько изменится ее средний радиус. Ускорение спутника по-прежнему приблизительно равно g ; поэтому можно записать $g = (v + \Delta v)^2 / (R + \Delta R)$, где ΔR — среднее увеличение радиуса обращения спутника. Учитывая, что $\Delta v \ll v$, и пренебрегая $(\Delta v/v)^2$, получаем $\Delta R = 2mv/Mg = 40$ м.

Примечание. Задачу можно решить строго, если использовать второй закон Кеплера (сохранение секториальной скорости), как это сделано в задаче 1.194. При этом максимальное изменение радиуса получается в два раза больше среднего, т. е. $\Delta R = 80$ м. Предоставляем проделать это читателям самостоятельно.

1.189. При испытаниях на Земле энергия пружины переходила в кинетическую энергию конуса. Следовательно, энергия сжатой пружины $U = mv_0^2/2$. Пусть на орбите ракета перед разделением движется со скоростью v , после разделения — со скоростью v_0 , а конус — со скоростью v_k . По законам сохранения энергии и импульса имеем

$$\begin{aligned}(M + m)v &= Mv_0 + mv_k, \\ (M + m)v^2/2 + mv_0^2/2 &= Mv_0^2/2 + mv_k^2/2\end{aligned}$$

откуда $v_{отн} = v_0 - v_k = v_0(1 + m/M)^{1/2} = 5,6$ м/с.

1.190. Угловая скорость спутника меняется со временем по закону $\omega = \omega_0 + \beta t$. За месяц она возрастает на величину $\Delta\omega = \beta\tau$. За это же время период изменяется на величину ΔT , так что $T_0 + \Delta T = 2\pi/(\omega_0 + \Delta\omega)$. Пренебрегая произведением $\Delta T \cdot \Delta\omega$ (ввиду малости этих величин), получим приближенно $\Delta T/T_0 = -\Delta\omega/\omega_0 = -\beta\tau/\omega_0$.

Изменение радиуса орбиты можно вычислить с помощью третьего закона Кеплера:

$$(T_0 + \Delta T)^2 / (R_0 + \Delta R)^3 = T_0^2 / R_0^3.$$

Пренебрегая в этом равенстве всеми степенями $\Delta R/R$ и $\Delta T/T$ кроме первой, имеем $3 \Delta R/R_0 = 2 \Delta T/T_0$. С учетом этого получим $\Delta R = -2\beta\tau R_0/3\omega_0$. Так как $H \ll R_3$, ускорение спутника равно g ; ввиду того, что оно является центростремительным ускорением, имеем $g = \omega_0^2 R_0$, откуда $\omega_0 = (g/R_0)^{1/2}$. Учитывая, что $R_0 = R_3 + H$, получим $\Delta R = -2\beta\tau (R_3 + H)^{3/2}/3g^{1/2} \approx -3$ км. Итак, через месяц спутник окажется на высоте $H_1 = H + \Delta R = 497$ км.

1.191. $\beta = -1,05 \cdot 10^{-23}$ рад/с² (см. решение задачи 1.190).

1.192. Определим высоту, на которую поднимется ракета. Для этого удобно воспользоваться законом сохранения энергии. Так как высоту подъема в этом случае нельзя считать малой по сравнению с радиусом Земли, будем использовать точное выражение для потенциальной энергии в гравитационном поле: $U = -Gm_1m_2/R$. По определению это есть работа, совершаемая силами гравитации при перемещении одного из тел из данной точки в бесконечность, т. е.

$$U = - \int_R^\infty \frac{Gm_1m_2}{R^2} dR.$$

Итак, закон сохранения энергии дает

$$mv^2/2 - GmM_3/R_3 = -GmM_3/R.$$

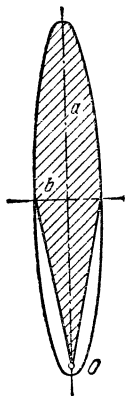


Рис. 1.128.

По условию $v = (gR_3)^{1/2}$, а $GM_3 = gR_3^3$ (см. решение задачи 1.172). Используя эти выражения, получаем, что $R = 2R_3$, т. е. ракета поднимается над Землей на высоту, равную R_3 . Ее траекторию можно представить себе как узкий эллипс, большая полуось которого $a = R_3$. Из третьего закона Кеплера следует, что период обращения по такому эллипсу равен периоду обращения спутника, движущегося по круговой орбите вблизи поверхности Земли: $T = 2\pi (R_3/g)^{1/2}$ (см. решение задачи 1.190).

Согласно второму закону Кеплера время полета ракеты пропорционально площади, которую прошел радиус-вектор, проведенный из центра Земли O (рис. 1.128). Площадь эллипса $S_0 = \pi ab$, где a и b — длины его полуосей. Площадь, заштрихованная на рис. 1.128, $S \approx \pi ab/2 + ab$. Время полета

$$t = TS/S_0 = (\pi + 2) (R_3/g)^{1/2} = 4,12 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 1 \text{ ч } 9 \text{ мин.}$$

1.193. По условию задачи скорость кабины на высоте $H = R_L$ должна быть равна по модулю скорости базового космического корабля. Так как сила притяжения Луны является для корабля центростремительной силой, то имеем условие $GM_L m / (2R_L)^2 = mv^2 / 2R_L$. Принимая во внимание равенство $GM_L = g_L R_L^3$ (см. решение задачи 1.172), получим для скорости корабля $v^2 = g_L R_L / 2$.

Применим закон сохранения энергии к лунной кабине, используя точное выражение для потенциальной энергии в гравитационном поле (см. решение задачи 1.192):

$$mv_0^2/2 - GmM_L/R_L = mv^2/2 - GmM_L/2R_L.$$

Подставляя выражение для v , находим $v_0 = (3g_L R_L/2)^{1/2} = 2,1 \text{ км/с}$. Однако следует иметь в виду, что при этом направление скорости кабины не совпадает с направлением скорости базового корабля. Для их мягкой стыковки необходима коррекция направления скорости.

1.194. а) Закон сохранения энергии при переходе корабля из точки A в точку B дает

$$Mv_A^2/2 - GMM_L/(R_L + h) = Mv_B^2/2 - GMM_L/R_L.$$

По второму закону Кеплера радиус-вектор за равные промежутки времени описывает равные площади. Если промежуток времени Δt мал, это будут приблизительно площади треугольников с основанием $v \Delta t$ и высотой R :

$$(1/2) (R_L + h) v_A \Delta t = (1/2) R_L v_B \Delta t.$$

Из этих соотношений находим, что скорость корабля в точке A после выключения двигателя

$$v_A = [2g_L R_L^3 / (R_L + h) (2R_L + h)]^{1/2}.$$

До включения двигателя корабль двигался по круговой орбите и его скорость (см. решение задачи 1.193) $v_0 = [g_L R_L^3 / (R_L + h)]^{1/2}$. Двигатель должен уменьшить скорость корабля на величину

$$\Delta v = v_0 - v_A = \left(\frac{g_L R_L^3}{R_L + h} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{2R_L}{2R_L + h} \right)^{1/2} \right] \approx \frac{v_0 h}{4R_L} = 24 \text{ м/с}.$$

Так как двигатель работает очень короткое время, можно использовать закон сохранения импульса:

$$Mv_0 = (M - m)(v_0 - \Delta v) + m(u + v_0),$$

где m — масса выброшенного топлива. Преобразуя это выражение, получаем $m = M \Delta v / (u + \Delta v) \approx M \Delta v / u = 29$ кг.

б) В этом случае решение проводится аналогично случаю а), с той лишь разницей, что вектор $\Delta \vec{v}$ направлен перпендикулярно вектору \vec{v}_0 ; поэтому $\Delta v = (v_A^2 - v_0^2)^{1/2}$. Окончательно получаем

$$\Delta v = h \left(\frac{g_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}} + h} \right)^{1/2} = 97 \text{ м/с}, \quad m = M \Delta v / u = 116 \text{ кг}.$$

Применение законов механики в ядерной физике

1.195. Движение частей атома после распада может быть описано уравнениями

$$M_1 v_1 = M_2 v_2, \quad M_1 v_1^2 / 2 + M_2 v_2^2 / 2 = T,$$

первое из которых выражает закон сохранения импульса, а второе — закон сохранения энергии (v_1 и v_2 — скорости масс M_1 и M_2). Отсюда

$$v_1 = M_2 \left(\frac{2T}{M_1 M_2^2 + M_2 M_1^2} \right)^{1/2}, \quad v_2 = M_1 \left(\frac{2T}{M_1 M_2^2 + M_2 M_1^2} \right)^{1/2}.$$

1.196. Кинетическая энергия атома актиния $T = Mv^2/2$, где v — скорость атома, $M = Am_p = 228m_p$ ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг — масса протона). Для нахождения скорости v воспользуемся законом сохранения импульса: $Mv = m_e v_e$, где v_e — скорость и $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона. (В левой части последнего соотношения мы пренебрегли m_e по сравнению с M .) Скорость v_e найдем из соотношения $m_e v_e^2 / 2 = T_e$. Из приведенных уравнений получаем $T = T_e m_e / Am_p = 0,12 \text{ эВ} = 1,9 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$.

$$1.197. T_\alpha / (T_\alpha + T) = (A - A_\alpha) / A = 98 \text{ \%}.$$

$$1.198. v = (2m_n T)^{1/2} / (m_n + m_{\text{Cd}}) = 10^4 \text{ м/с}.$$

1.199. Пусть m_n — масса нейтрона, v_0 — его начальная скорость. После первого соударения

$$m_n v_0 = 4m_n v'_1 - m_n v_1, \quad m_n v_0^2 / 2 = 4m_n v_1'^2 / 2 + m_n v_1^2 / 2,$$

где $4m_n$ — масса ядра гелия, v'_1 — его скорость после соударения, v_1 — скорость нейтрона после соударения. Решая эти уравнения, определяем $v_1 = (3/5)v_0$. После второго соударения аналогично имеем

$$m_n v_1 = 4m_n v'_2 - m_n v_2, \quad m_n v_1^2 / 2 = 4m_n v_2'^2 / 2 + m_n v_2^2 / 2,$$

откуда $v_2 = (3/5)v_1 = (9/25)v_0$. Следовательно, энергия нейтрона уменьшится в $625/81 \approx 7,7$ раза.

1.200. Запишем закон сохранения импульса для направления полета ядра дейтерия и перпендикулярного к нему направления полета нейтрона (рис. 1.129):

$$m_D v_D = m_\alpha v_\alpha \cos \varphi, \quad m_n v_n = m_\alpha v_\alpha \sin \varphi.$$

По закону сохранения энергии

$$m_n v_n^2 / 2 + m_\alpha v_\alpha^2 / 2 = m_D v_D^2 / 2 + Q.$$

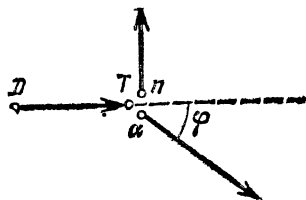


Рис. 1.129.

Решая эти уравнения, получим

$$T_n = \frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{m_\alpha}{m_n + m_\alpha} \left(Q + \frac{m_\alpha - m_D}{m_\alpha} T_D \right) = 12 \text{ МэВ}.$$

$$1.201. T_n / (T_\alpha + T_n) = m_\alpha / (m_\alpha + m_n) = 0,8.$$

$$1.202. T_T = Q m_\alpha / (m_\alpha + m_T) = 2,74 \text{ МэВ}, \quad T_\alpha = 2,06 \text{ МэВ}.$$

$$1.203. T_n = 2,95 \text{ МэВ}, \quad T_{Be} = 0,42 \text{ МэВ}.$$

$$1.204. v = (m_C v_C + m_\alpha v_\alpha) / (m_C + m_\alpha) = 625 \text{ м/с}.$$

1.205. Так как пороговая энергия довольно велика, импульс системы нельзя считать равным нулю. Центр масс системы движется со скоростью $v = m_\alpha v_\alpha / (m_\alpha + m_N)$. В результате взаимодействия скорость центра масс не изменяется, поэтому пороговая энергия должна быть больше энергии Q , поглощаемой в этой реакции: $E_\pi - Q = (m_\alpha + m_N) v^2 / 2$. Из этих соотношений находим $Q = E_\pi m_N / (m_N + m_\alpha)$. Применим закон сохранения энергии и импульса к случаю, когда энергия образовавшихся протонов равна нулю:

$$E_\alpha = Q + m_O v_O^2 / 2, \quad m_\alpha v_\alpha = m_O v_O.$$

Из этих уравнений находим

$$E_\alpha = Q \frac{m_O}{m_O - m_\alpha} = E_\pi \frac{m_O m_N}{(m_N + m_\alpha)(m_O - m_\alpha)} = \frac{119}{117} E_\pi,$$

$$\Delta E = E_\alpha - E_\pi = (2/117) E_\pi = 25 \text{ кэВ}.$$

$$1.206. \Delta E = (1/49) E = 39 \text{ кэВ (см. решение задачи 1.205)}.$$

II. ТЕПЛОТА

Тепловое расширение тел

2.1. До 182°C .

2.2. Пусть объем шарика при температуре t_1 равен V ; тогда при температуре t_2 он равен $V(1 + \beta\tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$. Запишем показания весов при трех взвешиваниях:

$$P = \rho V g, \quad P_1 = P - \rho_1 V g, \quad P_2 = P - \rho_1 V g \frac{1 + \beta\tau}{1 + \beta_1\tau},$$

где ρ — плотность стекла, ρ_1 — плотность жидкости (обе при температуре t_1). В формуле для P мы пренебрегаем выталкивающей силой ввиду малой плотности воздуха. Поэтому несущественно, при какой температуре произведено это взвешивание. Отсюда получаем

$$\beta_1 = \frac{P_2 - P_1 + (P - P_1) \beta (t_2 - t_1)}{(P - P_2) (t_2 - t_1)}.$$

На практике обычно применяется шарик из кварцевого стекла, коэффициент объемного расширения которого гораздо меньше коэффициента объемного расширения подавляющего большинства жидкостей. В этом случае ответ можно упростить:

$$\beta_1 = (P_2 - P_1) / (P - P_2) (t_2 - t_1).$$

2.3. Будем считать, что средняя линия каждой пластинки сохраняет длину, которая была бы в неизогнутом состоянии (рис. 2.48). Радиус r определяется из условий

$$\begin{aligned} \varphi(r - a/2) &= l + \Delta l_1, & \Delta l_1 &= l \alpha_1 \Delta T, \\ \varphi(r + a/2) &= l + \Delta l_2, & \Delta l_2 &= l \alpha_2 \Delta T, \\ (1 + \alpha_1 \Delta T)(r + a/2) &= (1 + \alpha_2 \Delta T)(r - a/2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$r = a [2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta T] / 2 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T = 22,5 \text{ см.}$$

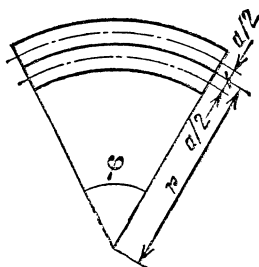


Рис. 2.48.

2.4. При охлаждении стержень сжимается. Его длина становится равной $l = l_0 [1 - \alpha (T_2 - T_1)]$, откуда $(l_0 - l)/l_0 = \alpha (T_2 - T_1)$. После прогрева стержня, зажатого в обойму, его длина остается равной l , а сжатие $l - l_0$ будет теперь вызвано упругими силами. Запишем закон Гука: $(l_0 - l)/l_0 = P/E$, где P — давление со стороны обоймы на стержень в направлении оси стержня. Сравнивая два выражения для $(l_0 - l)/l_0$, найдем искомое давление: $P = E \alpha (T_2 - T_1) = 4 \cdot 10^8$ Па. Обратим внимание на то, что давление не зависит от длины стержня.

2.5. При нагревании стержня от температуры T_1 до температуры T_2 без ограничивающих стенок он удлинится на величину

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = (l/2) (\alpha_1 + \alpha_2) (T_2 - T_1).$$

При ограничивающих стенках нагретый стержень окажется сжатым на такую же величину. По закону Гука (сжимающая сила F в обеих частях стержня одинакова)

$$\Delta l = \frac{l_1}{E_1} \frac{F}{S} + \frac{l_2}{E_2} \frac{F}{S} \approx \frac{l}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \frac{F}{S}.$$

Это соотношение, вообще говоря, является приближенным, так как мы заменили длины l_1 и l_2 частей стержня при температуре T_2 их длиной $l/2$ при температуре T_1 . Легко, однако, понять, что относительная ошибка при определении Δl по этой формуле будет порядка $\Delta l/l$ и, следовательно, наше приближение является очень хорошим ($\Delta l \ll l$). Из записанных выше соотношений найдем

$$F = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{E_1 + E_2} E_1 E_2 S (T_2 - T_1).$$

Смещение ΔL места стыка частей стержня можно определить, приняв во внимание, что оно складывается из перемещения за счет теплового расширения (например, первой части стержня) и обратного перемещения за счет сжатия:

$$\Delta L = \frac{l}{2} \left[\alpha_1 (T_2 - T_1) - \frac{F}{E_1 S} \right] = \frac{l}{2} \frac{\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2} (T_2 - T_1).$$

2.6. При нагревании длина внутренней окружности кольца увеличилась:

$$l_1 = l_2 [1 + \alpha (T_1 - T_2)], \quad (l_1 - l_2)/l_2 = \alpha (T_1 - T_2),$$

где l_1 и l_2 — длины внутренней окружности при температурах $T_1 = 573$ К и $T_2 = 291$ К. Пренебрегая уменьшением диаметра стального цилиндра под действием сжимающих усилий со стороны кольца, считаем, что после охлаждения кольца длина его внутренней окружности остается равной l_1 и кольцо

окажется растянутым упругими силами. Так как в нашем случае толщина кольца мала по сравнению с его диаметром, можно считать, что относительные удлинения всех слоев кольца одинаковы и равны $(l_1 - l_2)/l_2$. Тогда растяжение кольца можно связать с растягивающим усилием при помощи закона Гука: $(l_1 - l_2)/l_2 = F/ES$, где F — растягивающая сила, S — сечение кольца, E — модуль Юнга. Окончательно получаем $F = E\alpha(T_1 - T_2) = 3360$ Н.

Это решение не вполне точно не только потому, что мы заменили неоднородную деформацию кольца однородным растяжением, но и потому, что радиальные напряжения в кольце вызывают изменение длины его окружности. Чем меньше толщина кольца по сравнению с диаметром, тем меньше поправки, вносимые этими обстоятельствами.

Уравнение газового состояния

2.7. Решение данной задачи сводится к подстановке числовых значений в уравнение газового состояния. Нужно только учесть, что молекула азота состоит из двух атомов и, следовательно, $\mu = 28$ г/моль: $P = mRT/\mu V = 8,8 \cdot 10^4$ Па.

Примечание. При решении данной и большинства последующих задач объединенный газовый закон (называемый в дальнейшем уравнением газового состояния) удобно записывать в универсальной форме:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где m — масса газа, μ — его молярная масса, R — универсальная (т. е. молярная — одинаковая для всех газов) газовая постоянная. Значение R легко получить из закона Авогадро, согласно которому 1 моль любого газа при нормальных условиях занимает объем 22,4 дм³. Таким образом, если $\nu = m/\mu = 1$ моль, $P = P_0 = 10^5$ Па, $T = T_0 = 273$ К, то $V = V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3}$ м³/моль и

$$R = P_0 V_0 / T_0 = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

Поскольку $m/V = \rho$ — плотность газа, уравнение газового состояния может быть также переписано в виде $\rho = \mu P / RT$. Эту запись уравнения газового состояния также удобно использовать при решении ряда задач.

2.8. Применяя к воздуху, занимающему объем комнаты при температурах $t_1 = 10^\circ\text{C}$ и $t_2 = 20^\circ\text{C}$, уравнение газового состояния (разрешенное относительно массы), имеем

$$\Delta m = \frac{PV\mu}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 2,2 \text{ кг}.$$

Примечание. Здесь T_1 и T_2 — абсолютные температуры, соответствующие температурам по Цельсию t_1 и t_2 . В дальнейшем подобные замены температуры по Цельсию t на абсолютные температуры T не оговариваются.

2.9. $P = \rho RT / \mu = \rho_0 RT / n\mu = 2,5 \cdot 10^6$ Па.

2.10. Используя уравнение газового состояния, найдем отношение масс гелия в первом и во втором случаях:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_2 + (M_1 - M_2)}{m_2} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Из этого соотношения следует, что $m_2 = \frac{M_1 - M_2}{P_1/P_2 - 1}$. Объем баллона

$$V = m_2 R T_1 / \mu P_2 = (M_1 - M_2) R T_1 / (P_1 - P_2) \mu.$$

Теперь нетрудно найти искомую массу гелия:

$$m = (M_1 - M_2) P T_1 / (P_1 - P_2) T_2 = 3 \text{ кг.}$$

Примечание. Здесь и в дальнейшем мы используем уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона—Менделеева). Надо, однако, ясно понимать, что область применения этого уравнения ограничена. Когда плотность газа возрастает по сравнению с плотностью при нормальных условиях примерно в 100 раз (для температур, близких к комнатной, это соответствует давлению порядка 10^7 Па), расстояние между молекулами становится сравнимым с размером молекул. (Соответствующий расчет предлагаем читателю провести самостоятельно, приняв радиус молекул равным $(2-3) \cdot 10^{-10}$ м.) При таких плотностях параметры газа заметно отличаются от рассчитанных по уравнению состояния идеального газа.

$$2.11. \nu = (m_1 - m_2) P_2 T_1 / (P_1 T_2 - P_2 T_1) \mu = 100 \text{ моль.}$$

2.12. Как известно, при давлении $P_0 = 1$ атм (10^5 Па) 1 моль газа (для CO_2 это $\mu = 44$ г/моль) занимает объем $V_0 = 22,4$ дм³/моль. Масса газа m в полном баллоне найдется из пропорции $m/\mu = PV/P_0 V_0$. Изменение массы баллона

$$\Delta m = m(P - P_0)/P = \mu V(P - P_0)/V_0 P_0 = 0,14 \text{ г} > 0,01 \text{ г.}$$

Следовательно, разницу в массах полного и пустого баллончиков нетрудно заметить.

2.13. При постоянной температуре масса газа в сосуде постоянного объема пропорциональна давлению. Поэтому расход газа можно измерить в произвольных единицах давления. Расчет дает для времени, которым располагает аквалангист при проведении ремонтных работ, значение $\tau_2 = 20$ мин. Искомое время (с момента погружения) составляет $\tau = 30$ мин.

2.14. Адсорбент может поглотить $m/50 = 0,02$ кг водорода. Используя уравнение газового состояния, получим, что такая масса водорода при давлении $P = 10^5$ Па и температуре $T = 80$ К занимает объем $V = 65,6$ дм³. Именно такой объем и можно откачать с помощью адсорбента массы $m = 1$ кг.

2.15. Искомое давление

$$P_1 = \frac{m R T_1}{50 \mu (V - m/\rho)} + \frac{P T_1}{T},$$

где $\mu = 2$ г/моль — молярная масса водорода.

2.16. Из уравнения газового состояния можно найти, например, давление, которое создал бы пропан в баллоне, если бы он весь находился в газообразном состоянии (при комнатной температуре — около 300 К). Получаем давление, превышающее $3 \cdot 10^7$ Па. Значит, большая часть пропана находится в конденсированном (жидком) состоянии.

2.17. При постоянном давлении объем газа пропорционален температуре (закон Гей-Люссака): $V/V_1 = T/T_1$. Учитывая, что $T_1 = T + \Delta T$ и $V_1 = V(1 + \beta \Delta T)$, где β — коэффициент объемного расширения газа (равный по условию задачи $1/335$), получим

$$1/(1 + \beta \Delta T) = T/(T + \Delta T), \text{ откуда } T = 1/\beta = 335 \text{ К.}$$

2.18. Применяя закон Шарля и рассуждая, как при решении задачи 2.17, получим $T = 500$ К.

2.19. $m = \mu V \Delta P / R \Delta T \approx 12$ кг.

2.20. Первоначально в объеме V содержалось $\nu = m/\mu = PV/RT = 41,7$ моль водорода. Для образования $0,5$ дм³ ($0,5$ кг) воды требуется 500 г : 18 г/моль \Rightarrow $= 27,7$ моль водорода. Следовательно, израсходовано 14 моль, или 28 г водорода.

2.21. В результате нагревания и расширения газ из состояния P_1, V_1 перешел в состояние $2P_1, 4V_1$. Эти состояния связаны уравнением $P_1 V_1^n = 2P_1 (4V_1)^n$, откуда $4^n = 1/2$ и показатель степени $n = -1/2$.

2.22. Так как кривые процесса $PV^n = \text{const}$ при $0 < n < 1$ идут на графике зависимости P от V более полого, чем проведенные через те же точки изотермы $PV = \text{const}$, то при расширении газа по этому закону давление падает медленнее, чем при изотермическом расширении. Следовательно, газ нагревается.

2.23. Баллон с азотом взорвался при давлении $P_1 = m_1 RT_1 / \mu_1 V$. По условию давление водорода $P_2 = P_1 / 5$. Массу водорода найдем из уравнения газового состояния:

$$m_2 = \mu_2 P_2 V / RT_2 = m_1 \mu_2 T_1 / 5 \mu_1 T_2 = 30,4 \text{ г.}$$

2.2. $T = 1250$ К. Расчет проведен в предположении, что вся вода превратилась в пар. В нашем случае это заведомо справедливо, так как при температуре, превышающей $t_k = 374,1$ °С (критическую температуру воды), водяной пар не может быть превращен в жидкость ни при каком давлении.

2.25. Давление в сосуде, которое установится после испарения азота (при условии, что сосуд не разорвется), находим из уравнения газового состояния: $P = mRT/\mu V = 3,47 \cdot 10^6$ Па. Так как $P > P_0 = 2 \cdot 10^6$ Па, сосуд разорвется.

$$2.26. \mu_r = \mu_b \frac{m_r}{m_b} \frac{P_b}{P_r} = \mu_b \frac{(m_3 - m_1) P_b}{(m_2 - m_1) P_r} = 48 \text{ г/моль.}$$

2.27. Определим количество газа в баллоне в первом и втором состояниях: $\nu_1 = P_1 V_1 / RT_1$, $\nu_2 = P_2 V_2 / RT_2$. Искомый объем газа можно вычислить, например, так: $V = (\nu_1 - \nu_2) V_0 = 755$ дм³, где $V_0 = 22,4$ дм³/моль — молярный объем газа при нормальных условиях.

$$2.28. T_2 = \frac{P_2 V_1}{R} \left(\frac{P_1 V_1}{RT_1} - \frac{V}{V_0} \right) = 255 \text{ К.}$$

2.29. Молярная масса $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$ была бы равна $\mu = 58$ г/моль. Молярная масса $(\text{C}_3\text{H}_6\text{O})_n$ равна $n\mu$. Следовательно, $n = mRT/\mu PV = 2$.

2.30. Вычисляя молярную массу соединения, получаем $\mu = 16$ г/моль. Подбором определим искомую формулу: CH_4 .

2.31. CO_2 .

2.32. Плотность газа, составляющего шаровую молнию, равна плотности воздуха, так как молния свободно плавает в воздухе. Равны, очевидно, и давления. Тогда молярные массы вещества молнии и воздуха обратно пропорциональны их абсолютным температурам, и мы можем найти молярную массу вещества молнии: $\mu = \mu_0 T_0 / T = 86$ г/моль, где $\mu_0 = 29$ г/моль — молярная масса воздуха. Искомое число молекул воды, связанных с ионом азота, найдем из соотношения $n = (\mu - \mu_N) / \mu_b = 4$, где $\mu_N = 14$ г/моль — молярная масса ионов азота (практически равная молярной массе атомарного азота), $\mu_b = 18$ г/моль — молярная масса воды.

2.33. Определим объемный расход газа, протекающего по трубе: $V_{\tau} = V/\tau = mRT/\mu P\tau$. Объемный расход связан со скоростью движения газа в трубе соотношением

$$V_{\tau} = vS, \text{ откуда } v = V_{\tau}/S = mRT/\mu PS\tau = 0,87 \text{ м/с.}$$

$$2.34. F = (\pi D^2 P_0/4) (1 - T_0/T) = 21 \text{ Н.}$$

2.35. Давление в цилиндре определяется условием равновесия поршня и остается постоянным: $P = P_0 + Mg/S$. Изменение объема $\Delta V = V_2 - V_1$ можно выразить с помощью уравнения газового состояния через изменение температуры $T_2 - T_1$:

$$\Delta V = \frac{mR}{\mu P} (T_2 - T_1), \text{ откуда}$$

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{m}{\mu} \frac{R}{PS} (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} \frac{R}{P_0 S + Mg} (T_2 - T_1) = 41 \text{ см.}$$

2.36. В обоих случаях груз будет в равновесии, если давление внутри сосуда постоянно и будет удовлетворять условию $P = P_0 - Mg/S$. Так как в сосуде находится $\nu = 1$ моль азота, то $PV_1 = RT_1$, $PV_2 = RT_2$; следовательно, $\Delta V = R \Delta T/P = 1,64 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$. Груз поднимается на высоту $\Delta h = 164 \text{ см}$.

2.37. Запишем объединенный газовый закон для двух состояний газа:

$$\frac{(P_0 + mg/S) V}{T_1} = \frac{[P_0 + (M + m)g/S] V}{nT_2}.$$

Искомое изменение температуры

$$T_2 - T_1 = \frac{T_1 [Mg/S - (n-1)(P_0 + mg/S)]}{n(P_0 + mgS)}.$$

$$2.38. M = 3(m + P_0 S/g).$$

$$2.39. m = Mn(k-1)/(n-1).$$

2.40. Запишем условия равновесия поршня в начальном и конечном состояниях:

$$Mg + P_0 S + kx_1 = P_1 S, \quad Mg + P_0 S + kx_2 = P_2 S,$$

где M — масса поршня, S — сечение цилиндра, x_1 и x_2 — изменения длины пружины, P_1 и P_2 — начальное и конечное давления газа, P_0 — атмосферное давление. Из этих соотношений получим $k(x_2 - x_1) = S(P_2 - P_1)$; при этом $x_2 - x_1 = H - h$. Из уравнения газового состояния имеем

$$P_2 - P_1 = \frac{mR}{\mu S} \left(\frac{T_2}{H} - \frac{T_1}{h} \right), \quad T_2 = T_1 \frac{H}{h} + \frac{\mu k H (H - h)}{mR}.$$

2.41. Так как в начальном положении давление газа равно атмосферному, то в этом положении пружина не сжата. Пусть первоначально поршень находится на высоте h . Если газ полностью откачать из-под поршня, то атмосферное давление сожмет пружину как раз на длину h . Это дает возможность прокалибровать пружину. По закону Гука $F = kx$, где k — жесткость пружины, x — изменение ее длины. При $x = h$ сила $F = P_0 S$ и, следовательно, $k = P_0 S/h$. Давление, которое пружина оказывает через поршень на газ, $P = F/S = P_0 x/h$. Когда объем газа увеличится в полтора раза, пружина удлинится на величину $h/2$ и будет создавать давление $P = P_0/2$. Применяя уравнение газового состояния, получим

$$P_0 V = \frac{m}{\mu} RT_0, \quad \left(P_0 + \frac{P_0}{2} \right) \cdot \frac{3}{2} V = \frac{m}{\mu} RT,$$

откуда $T = 2,25 T_0$.

2.42. В равновесии газ в малом сосуде примет температуру льда, в большом — пара, а давления их будут одинаковы. Запишем условие равенства масс газов во всем объеме в первом и во втором состояниях:

$$P_0 \frac{V_1 + V_2}{T_0} = P \left(\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} \right), \quad \text{откуда} \quad P = 9 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

$$2.43. \quad T = T_1 \frac{1 - 1/3}{1/3} \frac{V_2}{V_1} = 936 \text{ К} \quad (663^\circ \text{C}).$$

$$2.44. \quad T_2 = T_1 \left(\frac{\nu \mu}{m} - 1 \right) \frac{V_2}{V_1} = 49 \text{ К.}$$

2.45. Массы газа в сосудах одинаковы, поэтому равенство давлений можно записать в виде $(V_0 + \Delta V)/T_1 = (V_0 - \Delta V)/T_2$, причем перемещение капли $\Delta l = 4\Delta V/\pi d^2 = 29 \text{ см}$.

$$2.46. \quad \frac{P'}{P} = 3 \left(1 + \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} \right)^{-1} = 2,4.$$

2.47. $V_1/V = m_1\mu_2/(m_1\mu_2 + m_2\mu_1) = 0,71$, где $\mu_1 = 2 \text{ г/моль}$ и $\mu_2 = 28 \text{ г/моль}$ — молярные массы водорода и азота, V_1 — объем, занимаемый водородом, V — объем сосуда.

2.48. По условию задачи до нагрева $P_2 = 2P_1$ и $V_2 = V_1/2$, после нагрева $V'_2 = V'_1 = (V_1 + V_2)/2 = 3V_1/4$. Так как температура в верхней части сосуда неизменна, можно записать $P'_1V'_1 = P_1V_1$, откуда $P'_1 = 4P_1/3$. Принимая во внимание, что тяжелый поршень создает в нижнем сосуде неизменное дополнительное давление (равное P_1 , как это вытекает из соотношения $P_2 = 2P_1$), будем иметь $P'_2 = P_1 + P'_1 = 7P_1/3$. Для нижней части сосуда из уравнения газового состояния получим $P'_2V'_2/T_2 = P_2V_2/T_1$. Выражая давления и объемы в этом равенстве через P_1 и V_1 , найдем $T_2 = 7T_1/4 = 700 \text{ К}$.

2.49. Запишем условия равновесия поршня в первом и во втором случаях:

$$(P_1 - P)S = Mg, \quad (P - P_2)S = Mg,$$

где P — давление водорода (так как его температура и занимаемый объем не меняются, то и давление не меняется), P_1 — давление кислорода в первом случае, P_2 — давление кислорода во втором случае, M — масса поршня, S — сечение цилиндра. Поделив эти равенства почленно друг на друга и учтя, что давление кислорода должно уменьшиться в четыре раза, получаем $P_1 = 8P/5$, $P_2 = 2P/5$.

2.50. Так как поршни находятся в равновесии (рис. 2.49), то $P_0 - P = P_2 - P_0$, где P_2 — давление во втором цилиндре. Таким образом, $P_2 = 2P_0 - P$. После нагревания первого цилиндра получим аналогичное соотношение:

$P'_2 = 2P_0 - P'$. Из уравнения газового состояния для первого и второго цилиндров найдем

$$\frac{P'V'}{T_1} = \frac{PV}{T}, \quad P'_2V' = P_2V,$$

$$P' = \frac{T_1V}{TV'} P = \frac{T_1P'_2}{TP_2} P.$$

Подставляя сюда выражения для P_2 и P'_2 , получим уравнение для определения P' :

$$P' = \frac{2P_0PT_1}{2P_0T + P(T_1 - T)}.$$

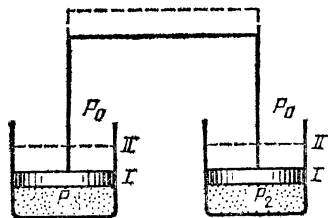


Рис. 2.49.

2.51. Условие равновесия системы (см. решение задачи 2.50): $P_2 = 2P_0 - P_1$. Так как массы воздуха в обоих цилиндрах и их объемы одинаковы, можно написать $P_1/T_1 = P_2/T$. Решая систему уравнений, получаем

$$P_1 = \frac{2P_0}{1 + T/T_1}, \quad P_2 = \frac{2P_0}{1 + T_1/T}.$$

2.52. Количество газа, введенное под поршень, $\nu = PV/RT_1$, где P — неизменное в течение всего опыта давление, V — объем, первоначально занимаемый газом в цилиндре (по условию равный объему нижнего сосуда). После открытия крана имеем $\nu_1 = PV_1/RT_1$ и $\nu_2 = PV/RT_2$. Из соотношения $\nu_1 + \nu_2 = \nu$ получаем $V_1/V = \nu_1/\nu = (T_2 - T_1)/T_2 = 3/4$.

2.53. $T_1/T_2 = 1/4$.

2.54. Газ будет перетекать в малый сосуд, так как его давление P превышает бы величину ΔP , если бы он весь остался в большом сосуда: $P = P_1 T/T_0 = 1,5 \cdot 10^5$ Па. Сохранение массы газа можно записать так: $P_2 V_2 + (P_2 + \Delta P) V_1 = PV_1$. Отсюда

$$P_2 = \frac{P_1 T/T_0 - \Delta P}{V_1 + V_2} V_1 = 4 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

2.55. Поршень всегда будет устанавливаться в таком положении, при котором сила давления газа равна силе упругости сжатой пружины $F = kh$. При температуре T имеем $P = kh/S$, $V = hS$; при температуре T_1 имеем $P_1 = kh_1/S$, $V_1 = h_1 S$. Из уравнения газового состояния получим $kh^2/T = kh_1^2/T_1$, откуда $h_1 = h \sqrt{T_1/T}$. (Убедитесь, что масса поршня не играет роли.)

2.56. $h_1 = (V^2/4S^2 + h^2)^{1/2} - V/2S$ (см. решение задачи 2.55).

2.57. Перемещение $x = (l/2) [(1 + 2RT/kl^2)^{1/2} - 1] = 0,5$ м.

2.58. $T_2 = 7(T_1 + T)/4$.

2.59. Объем газа пропорционален отношению T/P . Эта величина максимальна в точке 3. Для точки 1 имеем $V_1 = V_{\max} T_1/T_2 = 12,3 \text{ дм}^3$. Из уравнения газового состояния найдем, что масса газа $m = 16$ г.

2.60. $m = 56$ г, $P_1 = 4 \cdot 10^5$ Па.

2.61. Для той части газа, которая осталась в баллоне, справедливо соотношение $P/T_0 = P_0/T$. Следовательно, $T - T_0 = T_0(P_0/P - 1) = 121,7 \text{ К}$.

2.62. При наилучшем вакууме насос откачивает газ, который втекает в сосуд из-за наличия течи. Пусть P — предельное давление в сосуде, T — температура газа, m_τ — масса газа, откачиваемая в единицу времени при давлении P . Тогда $m_\tau = PV_\tau \mu / RT = \Delta P V \mu / RT \tau$. Отсюда $P = \Delta P V / V_\tau \tau = 10^{-3}$ Торр.

2.63. Поскольку горизонтальный ствол шахты сообщается с атмосферой, давление воздуха здесь равно атмосферному. В верхней части шахты (под заслонкой) давление воздуха $P_1 = P_0 - \rho_1 gh$, где ρ_1 — плотность воздуха внутри шахты. Аналогичным образом давление воздуха над заслонкой $P_2 = P_0 - \rho_2 gh$, где ρ_2 — плотность атмосферного воздуха. При написании этих соотношений предполагалось, что плотности воздуха ρ_1 и ρ_2 не меняются заметным образом при изменении высоты на величину h . Это предположение справедливо, если изменения давления с высотой (т. е. $\rho_1 gh$ и $\rho_2 gh$) малы по сравнению с давлением P_0 .

Плотности воздуха ρ_1 и ρ_2 могут быть определены из уравнения газового состояния:

$$\rho_1 = \mu P_0 / RT, \quad \rho_2 = \mu P_0 / RT_0.$$

Разность давлений

$$P_2 - P_1 = gh \frac{\mu P_0}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) = gh\mu \frac{P_0}{RT_0} \left(1 - \frac{T_0}{T} \right).$$

Для силы, действующей на заслонку, получаем $F = S(P_1 - P_2) = 500$ Н. Эта сила направлена вверх, так как $P_1 > P_2$. Для удержания заслонки в равновесии к ней нужно приложить внешнюю силу, направленную вниз и равную по модулю силе F . В справедливости сделанного выше предположения о постоянстве ρ_1 и ρ_2 можно убедиться с помощью числового расчета.

2.64. $T = 390$ К (см. решение задачи 2.63).

2.65. Выразим давление на поверхности Марса из уравнения газового состояния: $P = \rho RT/\mu$. Так как атмосфера, по предположению, — равноплотная, а высота ее гораздо меньше радиуса планеты, можно то же давление записать иначе: $P = \rho g_M H$, где ускорение свободного падения на поверхности Марса $g_M = GM/r^2$. В результате получаем $\mu = RTr^2/GMH = 29$ г/моль.

2.66. $T = G\mu MH/Rr^2 \approx 950$ К.

2.67. При установившемся режиме горения в камере двигателя будет такое давление, при котором скорость истечения массы газа из сопла равна скорости сгорания пороха: $\alpha PS = AP^n$, где α — некоторая постоянная. Отсюда

$$P^{1-n} = A/\alpha S, \quad P = (A/\alpha S)^{1/(1-n)}.$$

Отношение давлений в камерах $P_2/P_1 = (S_1/S_2)^{1/(1-n)}$. В случае, когда $n = 2/3$ и $S_1/S_2 = 2$, получим $P_2/P_1 = 2^3 = 8$.

2.68. По условию $S_1/S_2 = 2$ и $P_2/P_1 = 4$. Таким образом, $4 = 2^{1/(1-n)}$, $1/(1-n) = 2$, $n = 1/2$ (см. решение задачи 2.67).

2.69. Массу газа, находящуюся в каждый момент в камере, найдем из уравнения газового состояния: $m = \mu PV/RT$. Время пребывания каждой порции топлива в камере сгорания $\tau = m/m_\tau = \mu PV/RT m_\tau = 8 \cdot 10^{-3}$ с.

2.70. В неподвижном состоянии давление газа уравнивает атмосферное давление и давление поршня: $P = P_0 + Mg/S$. При подъеме газ должен дополнительно сообщать поршню ускорение $2g$. Поэтому давление в сосуде возрастает. Запишем закон Бойля — Мариотта: $(P_0 + Mg/S)V = (P_0 + 3Mg/S)V_1$ где $V_1 = 2V/3$ — новый объем газа. Отсюда $M = P_0 S/3g = 3,3$ кг.

2.71. $P_0 = 7Mg/S = 3,5 \cdot 10^5$ Па.

Газовые смеси

2.72. Каждый сорт газа в смеси дает вклад в общее давление, равный парциальному давлению, т. е. давлению, которое этот газ оказывал бы на стенки сосуда, если бы других газов в сосуде не было (закон Дальтона). Для парциальных давлений можем написать

$$P_1 = m_1 RT/\mu_1 V, \quad P_2 = m_2 RT/\mu_2 V.$$

Отсюда

$$(P_1 + P_2)V = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)RT.$$

Следовательно,

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{(m_1 + m_2)(P_1 + P_2)}{(m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)RT} = 0,51 \text{ кг/м}^3.$$

2.73. При одинаковых объемах и температурах количество газа пропорционально давлению. Следовательно, в трубке давление гелия должно быть

$P_{\text{гг}}=5$ Торр, а давление неона должно быть $P_{\text{тг}}=1$ Торр. Гелия нужно больше, а его общее количество в баллоне меньше, поэтому число заполненных трубок определяется только гелием. Из закона Бойля—Мариотта можем получить число трубок: $n=P_1V/V_0P_{\text{тг}}=333$. Более точный расчет должен учитывать, что после падения давления в баллоне до величины $P_{\text{тг}}$ газ в трубке не потечет. Соответственно уточним результат: $n=(P_1-P_{\text{тг}})V/P_{\text{тг}}V_0=300$.

2.74. Грубый расчет (см. решение задачи 2.73) дает 27 баллонов, более точный—33 баллона.

2.75. Расчет с использованием закона Дальтона дает для массы азота

$$m_a = \frac{\mu_a \mu_k}{\mu_k - \mu_a} \left(\frac{P_1 V_1}{RT_1} - \frac{m}{\mu_k} \right) = 56 \text{ г},$$

где μ_a и μ_k —молярные массы азота и кислорода. Во втором сосуде азот создает давление $P_2 = m_a RT_2 / \mu_k V_2 = 2 \cdot 10^6$ Па.

2.76. Пусть m_1 —масса водорода, m_2 —масса кислорода; μ_1 и μ_2 —их молярные массы. Тогда на основании закона газового состояния и закона Дальтона для смеси можно записать

$$PV = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2) RT, \quad \text{где } m_1 + m_2 = m.$$

Отсюда

$$m_1 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \left(\frac{PV}{RT} - \frac{m}{\mu_2} \right) = 13,1 \text{ г}.$$

Масса кислорода в сосуде $m_2=46,9$ г. В молекуле воды массы кислорода и водорода относятся как 16:2=8. В нашем случае $m_2/m_1 < 8$, т. е. в баллоне имеется избыток водорода. Весь кислород пойдет на образование воды. Масса образовавшейся воды $M = m_2 \mu / \mu_2 = 52,7$ г (μ —молярная масса воды).

2.77. В баллоне имеется по $\nu=0,1$ моль водорода и кислорода. После реакции останется $\nu_1=0,05$ моль кислорода и появится $\nu_2=0,1$ моль водяного пара, т. е. количество вещества составит 3/4 начального. Давление возросло в три раза. Ясно, что температура будет в четыре раза больше начальной, т. е. $T=1200$ К.

2.78. Первоначальное давление P в первой половине сосуда равно сумме парциальных давлений аргона и водорода:

$$P = P_a + P_b = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_a}{\mu_a} + \frac{m_b}{\mu_b} \right).$$

После окончания диффузии

$$P' = P'_a + P'_b = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_a}{\mu_a} + \frac{m_b}{2\mu_b} \right),$$

так как водород теперь занимает объем $2V$. После несложных преобразований найдем $m_a/m_b=10$.

$$2.79. P = P_a + P_b = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_a}{\mu_a} + \frac{m_b}{2\mu_b} \right) = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

2.80. В результате процесса диффузии гелий распределится по всему сосуду, тогда как водород останется в первой половине сосуда. По закону Дальтона давление в смеси газа равно сумме давлений, оказываемых каждым газом в отдельности; поэтому давление в первой половине $P_1 = P_b + P_r$, давление во второй половине $P_2 = P_a$. Из уравнения газового состояния имеем

$$P_b = m_b RT / \mu_b V, \quad P_r = m_r RT / \mu_r 2V.$$

Отсюда

$$P_1 = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_a}{\mu_a} + \frac{m_r}{2\mu_r} \right) = 0,37 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad P_2 = \frac{RT}{V} \frac{m_r}{2\mu_r} = 0,12 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

2.81. Учитывая равенство объемов сосудов, получим, что вначале 20 % давления создавал гелий, а 80 % водород. Отсюда следует, что масса гелия вдвое меньше массы водорода.

$$2.82. V_2/V_1 = 3.$$

2.83. Первоначально кислород и смесь гелия и водорода занимали равные объемы. При этом суммарное количество H_2 и He равно количеству O_2 , т. е. 1 моль. После окончания диффузии гелия, когда его давления по разные стороны поршня сравнялись, правая часть цилиндра составляет $3/4$ общего объема, т. е. содержит $3/4$ общего количества смеси, или $3/2$ моль. Но кислорода там 1 моль; следовательно, правая часть цилиндра содержит $1/2$ моль гелия. В левой части гелия в три раза меньше, т. е. $1/6$ моль. Всего гелия в цилиндре содержится $2/3$ моль, или $8/3$ г, а водорода $1/3$ моль, или $2/3$ г.

2.84. Пусть μ_1 , μ_2 и m_1 , m_2 — молярные массы водорода и гелия и их массы; M — масса поршня; V и S — объем и сечение цилиндра; T — температура, при которой происходит опыт. Запишем условие равновесия поршня в момент непосредственно после ввода в цилиндр смеси газов:

$$PS = \frac{RT}{V/2} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) S = Mg.$$

После окончания диффузии гелия сила тяжести поршня уравновешивается только силой давления водорода, занимающего $1/3$ объема сосуда (давления гелия в обеих частях сосуда одинаковы):

$$P_1 S = \frac{RT}{V/3} \frac{m_1}{\mu_1} S = Mg.$$

Сравнивая эти выражения, получаем

$$3 \frac{m_1}{\mu_1} = 2 \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right), \quad \text{или} \quad \frac{m_1}{\mu_1} = 2 \frac{m_2}{\mu_2},$$

откуда $m_1/m_2 = 2\mu_1/\mu_2 = 1$, т. е. массы гелия и водорода в смеси одинаковы.

2.85. Количество водорода после полной диссоциации увеличится в два раза. Следовательно, как это вытекает из уравнения газового состояния, давление P_2 в сосуде будет в два раза больше того давления P , которое установилось бы в сосуде в отсутствие диссоциации. Из уравнения газового состояния имеем $PV_2/T_2 = P_1V_1/T_1$, откуда $P_2 = 2P = 2P_1V_1T_2/V_2T_1 = 8 \cdot 10^5$ Па.

2.86. Пусть в смеси содержится N_1 атомов азота и N_2 атомов водорода. Закон газового состояния для двух случаев можно записать в виде

$$PV = (N_1 + N_2/2) kT, \quad 3PV = (N_1 + N_2) k \cdot 2T,$$

где $k = R/N_A$ — постоянная Больцмана. Отсюда получаем $N_1/N_2 = 1/2$.

2.87. Если бы молекулы I_2 не диссоциировали, давление в сосуде оказалось бы равным $P_0 = \frac{RT}{V} \frac{m}{\mu} = 8,33 \cdot 10^5$ Па. Если степень диссоциации молекул I_2 на атомы I равна α , то в сосуде находится $\nu_1 = 2\alpha m/\mu$ атомарного иода и $\nu_2 = (1 - \alpha) m/\mu$ молекулярного иода. При этом полное давление в со-

суде на основании закона Дальтона равно сумме парциальных давлений I и I_2 :

$$P = \frac{RT}{V} \cdot 2\alpha \frac{m}{\mu} + \frac{RT}{V} (1-\alpha) \frac{m}{\mu} = (1+\alpha) P_0.$$

Отсюда следует, что $1+\alpha = P/P_0 = 1,12$; $\alpha = 0,12$, т. е. 12 %.

2.88. Если m — масса азота в сосуде, то αm — масса диссоциировавшего азота, а $(1-\alpha)m$ — масса молекулярного азота. На основании закона газового состояния и закона Дальтона имеем

$$P = \frac{RT}{V} \left[(1-\alpha) \frac{m}{\mu} + \alpha \frac{2m}{\mu} \right] = \frac{RT}{V} (1+\alpha) \frac{m}{\mu} = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

2.89. $m = 0,36 \text{ г.}$

2.90. Если бы диссоциации CO_2 не было, давление в сосуде оказалось бы равным (см. решение задачи 2.87) $P_0 = \frac{RT}{V} \frac{m}{\mu} = 98 \text{ кПа}$, где молярная масса CO_2 $\mu = 44 \text{ г/моль}$. На каждые две диссоциировавшие молекулы CO_2 приходится две молекулы CO и одна молекула O_2 . Если степень диссоциации CO_2 равна α , то в сосуде будет $\nu_1 = (1-\alpha)m/\mu$ молекул CO_2 , $\nu_2 = \alpha m/\mu$ молекул CO и $\nu_3 = \alpha m/2\mu$ молекул O_2 . Применяя закон Дальтона для смеси газов, найдем полное давление P в сосуде:

$$P = \frac{RT}{V} (1-\alpha) \frac{m}{\mu} + \frac{RT}{V} \alpha \frac{m}{\mu} + \frac{RT}{V} \alpha \frac{m}{2\mu} = \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) P_0.$$

Отсюда следует, что $1 + \alpha/2 = P/P_0 = 1,1$; $\alpha = 0,2$, т. е. 20 %.

2.91. Запишем уравнение газового состояния для первого и второго опытов с учетом того, что при диссоциации из 1 моль SO_3 получается 1,5 моль газов:

$$P_1 V = \left[3\nu_1 \frac{\alpha_1}{2} + \nu_1 (1-\alpha_1) \right] RT_1, \quad P_2 V = \left[3\nu_2 \frac{\alpha_2}{2} + \nu_2 (1-\alpha_2) \right] RT_2.$$

По условию $P_1 = P_2$. Отсюда

$$\alpha_2 = 2 \left[\frac{T_1 \nu_1}{T_2 \nu_2} \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \right) - 1 \right] = 0,75.$$

$$2.92. \alpha_2 = \frac{P_2 \nu_1}{P_1 \nu_2} (1 + \alpha_1) - 1 = 0,25.$$

Гидроаэростатика

$$2.93. F = 0,5 \rho g a (h_1^2 - h_2^2) = 1,57 \cdot 10^5 \text{ Н.}$$

2.94. Обозначим атмосферное давление через P_0 , давление воды на верхний поршень — через P . Давление воды на нижний поршень равно $P + \rho g l$, где ρ — плотность воды. Запишем условия равновесия поршней:

$$P_0 S_1 + T = P S_1, \quad (P + \rho g l) S_2 = P_0 S_2 + T.$$

Отсюда получаем $T = \rho g l S_1 S_2 / (S_1 - S_2)$.

2.95. При открытии крана вода начнет переливаться в правый сосуд, так как слева давление больше. Пусть x — высота перелившегося столба воды. Тогда условие равенства давлений в нижнем колене трубки можно записать в виде $\rho_1 (H - h_2 - x) = \rho_2 H + \rho_1 (x - h_2)$. Отсюда получаем

$$x = 0,05 \text{ м}, \quad H_1 = H - x = 0,95 \text{ м}, \quad H_2 = H + x = 1,05 \text{ м.}$$

В случае $h_1=0,02$ м при достижении x величины 0,02 м перетекание прекратится; следовательно, $H_1=0,98$ м, $H_2=1,02$ м.

2.96. При тепловом расширении жидкости в нагретом сосуде давление ее на дно сосуда не изменяется; поэтому уровень жидкости H_0 во втором сосуде останется прежним. Условие равновесия жидкости в сообщающихся сосудах запишется в виде $\rho_0 g H_0 = \rho g H$, где ρ и H — плотность и высота столба жидкости в нагретом сосуде. Из закона теплового расширения следует $1/\rho = (1 + \beta \Delta T)/\rho_0$, где $1/\rho_0$ и $1/\rho$ — удельные объемы жидкости. Из этих соотношений получим

$$H/H_0 = \rho_0/\rho = (1 + \beta \Delta T), \quad \Delta H = H - H_0 = H_0 \beta \Delta T.$$

Подстановка числовых значений дает $\Delta H = 2,6$ мм.

2.97. Пусть ρ — плотность жидкости при начальной температуре. Тогда при повышении температуры на величину Δt плотность станет равной $\rho/(1 + \beta \Delta t)$. Обозначим повышение уровня жидкости в левом колене через Δ_1 , а в правом — через Δ_2 . Запишем условие сохранения массы жидкости:

$$\rho (2Sh + S\Delta_1)/(1 + \beta \Delta t) + \rho S(h + \Delta_2) = \rho h (2S + S).$$

Условием равновесия будет равенство давлений на концах соединительной трубки:

$$\rho g (h + \Delta_1)/(1 + \beta \Delta t) = \rho g (h + \Delta_2).$$

Решая эти уравнения, получаем $\Delta_2 = h\beta \Delta t/2 (1 + \beta \Delta t)$. Пренебрегая $\beta \Delta t$ в знаменателе, получим $h_x \approx h (1 + \beta \Delta t/2)$.

$$2.98. \quad h_x \approx h (1 - \beta \Delta t/4).$$

2.99. Запишем условия равновесия для двух случаев:

$$M_1 g/S_1 + \rho g h = M_2 g/S_2, \quad M_1 g/S_1 + m g/S_1 = M_2 g/S_2,$$

где S_1 и S_2 — сечения поршней, ρ — плотность воды. Учитывая, что $m = 2M_1$ и $M_2 = 2M_1$, из этих соотношений получим $S_2 = 2S_1/3$, $\rho h = 2M_1/S_1$. Теперь запишем условие равновесия для третьего случая:

$$M_1 g/S_1 + \rho g H = (m + M_2) g/S_2,$$

где H — искомая разность уровней воды в цилиндрах. Принимая во внимание полученные выше выражения, можно записать $\rho H = 5M_1/S_1 = 5\rho h/2$. Таким образом, первый поршень окажется выше второго на величину $H = 5h/2 = 25$ см.

2.100. В отсутствие гири второй поршень окажется ниже первого на величину $H = h/6 = 1,66$ см.

2.101. Так как ртуть не смачивает фильтр, то у входа в канал образуется мениск с такой кривизной, что действие силы поверхностного натяжения (на единицу поверхности) уравновешивает давление на поверхность мениска, создаваемое столбиком ртути, и дополнительное давление P_0 : $P = P_0 + \rho g h$. Условие равновесия мениска может быть записано в виде $P = 2\sigma/r$, где r — радиус поверхности ртути в канале. Минимальное значение этого радиуса равно радиусу канала r_k . Поэтому ртуть начнет продавливаться через фильтр при условии

$$P_0 + \rho g h = 2\sigma/r_k, \quad \text{откуда} \quad r_k = 2\sigma/(P_0 + \rho g h).$$

Подставляя числовые значения, найдем $r_k = 10$ мкм.

2.102. Жидкость с помощью пипетки можно дозировать с точностью до массы одной капли $m_0 = 0,01$ г. Пока капля не оторвалась, она принимает такую форму, при которой вертикальная составляющая силы поверхностного натяжения уравновешивает силу тяжести, действующую на каплю. Вертикаль-

ная составляющая силы поверхностного натяжения примет свое максимальное значение $2\pi r\sigma$ (r — радиус отверстия пипетки, σ — поверхностное натяжение воды) в момент, предшествующий отрыву, когда под действием силы тяжести капля вытянется так, что ее верхняя часть примет цилиндрическую форму. Таким образом, в момент отрыва

$$mg = 2\pi r\sigma, \text{ откуда } \sigma = mg/2\pi r = 0,078 \text{ Н/м.}$$

2.103. Вырежем на поверхности мыльного пузыря маленький квадратик со стороной a и рассмотрим его равновесие под действием сил поверхностного натяжения и сил давления (рис. 2.50). На каждую сторону квадратика по касательной к поверхности действует сила $F = \sigma a$. Равнодействующая двух таких сил, приложенных к противоположным сторонам квадратика, как видно из рис. 2.50, равна $2\sigma a \sin \alpha$. Так как мыльная пленка имеет две поверхности, таких пар будет четыре. Сила, обусловленная дополнительным давлением P внутри пузыря, равна Pa^2 . Условие равновесия рассматриваемого элемента поверхности пузыря запишем в виде

$$Pa^2 = 4 \cdot 2\sigma a \sin \alpha, \text{ откуда } P = 8(\sigma/a) \sin \alpha.$$

Ввиду того, что для малых углов $\sin \alpha \approx \alpha$, имеем $P = 8\sigma a/2\alpha = 4\sigma/r$; здесь принято во внимание, что $a = 2r\alpha$.

Примечание. Заметим, что при решении данной задачи были учтены силы поверхностного натяжения, действующие на обеих поверхностях мыльной пленки. Каждая поверхность мыльной пленки создает избыточное давление $P = 2\sigma/r$.

2.104. Объем капли ртути V равен приблизительно объему цилиндра радиуса r и высоты d , которая найдется из условия

$$\pi r^2 d = m/\rho, \text{ откуда } d = m/\rho \pi r^2 = 9,36 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Ввиду малости отношения d/r , при вычислении d можно пренебречь дополнительным объемом V' выпуклой части капли (легко подсчитать, что $V'/V = \pi d/4r$). Сила поверхностного натяжения создает внутри капли дополнительное давление $P = 2\sigma/d$. Сила, которую надо приложить к пластинке, равна дополнительному давлению P , умноженному на площадь соприкосновения капли с пластинкой: $F = 2\sigma \pi r^2/d = 780 \text{ Н}$.

2.105. Так как боковая поверхность капли воды между стеклами будет вогнутой, то сила поверхностного натяжения вызовет уменьшение давления внутри капли на величину $P = 2\sigma/d$. В этой формуле учтено, что (как и в случае полного смачивания) радиус кривизны боковой поверхности капли можно считать равным $d/2$. Сила притяжения между пластинками будет равна разности давлений снаружи и изнутри капли, умноженной на площадь соприкосновения капли с пластинками:

$$F = PS \frac{2\sigma}{d} \frac{m}{\rho d} = 1,46 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

2.106. Легко видеть, что давление внутри столба масла, втянутого силами поверхностного натяжения в трубку, будет отрицательным (т. е. столб растянут, а не сжат). Действительно, в условиях данной задачи внешнее давление на

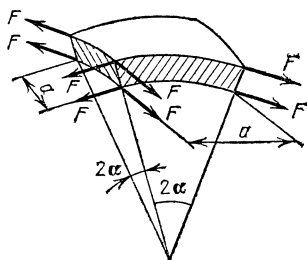


Рис. 2.50.

поверхность масла равно нулю. Поэтому давление внутри столба на уровне масла в чашке тоже равно нулю, так как давления в жидкости в точках, расположенных на одном уровне, всегда одинаковы. Во всех точках внутри столба давление будет меньше нуля на величину гидростатического давления. В частности, для точки, находящейся на уровне $h/3$, будем иметь $P = -\rho gh/3$. Высоту h можно определить, записав условие равновесия столба под действием силы тяжести и силы поверхностного натяжения: $h = 2\sigma/\rho gr$. Подставляя это выражение в формулу для P , найдем $P = -2\sigma/3r$.

2.107. Атмосферное давление $P_0 = 1$ атм (10^5 Па) соответствует давлению столба воды высоты $H = 10$ м; следовательно, на глубине $h = 40$ м давление (с учетом атмосферного) $P_1 = 5$ атм. Объем V_1 , который может занять воздух, т. е. объем воды, которую он может вытеснить, найдем из уравнения газового состояния: $V_1 = VPT_1/P_1T = 920$ дм³.

2.108. $\tau = l^3 (P_0 + \rho gh)/V\tau P_0 = 24$ мин.

2.109. Столбик ртути находится в равновесии, когда

$$\rho ghS = P_0S - PS, \quad P = \rho g(H - h), \quad \text{где } P_0 = \rho gH.$$

Так как температура не менялась, то

$$PV = P_0V_0, \quad P(l - h)S = P_0(l/2)S,$$

или

$$P = \frac{P_0 l}{2(l - h)}, \quad \rho g(H - h) = \frac{\rho g H l}{2(l - H)},$$

откуда

$$h^2 - (H + l)h + \frac{Hl}{2} = 0, \quad h_{1,2} = \frac{H + l}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{H^2 + l^2}.$$

Но $0 < h < l$ по смыслу задачи, а $h_1 > l$ и, следовательно, не может быть решением задачи. Остается

$$h = \frac{H + l}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{H^2 + l^2}.$$

Заметим, что при решении данной задачи силы поверхностного натяжения во внимание не принимались.

2.110. Состояние воздуха в правом колене трубки подчиняется закону Бойля — Мариотта. В первом случае $P_1 = P_0 + \rho gL/3$, $V_1 = LS/3$. Если обозначить через x высоту столба воздуха во втором случае (после слива части жидкости), то

$$(P_0 + \rho gL/3) LS/3 = P_0 xS, \quad \text{откуда } x = (1 + \rho gL/3P_0) L/3.$$

Относительное изменение массы жидкости будет равно

$$\frac{2x - L/3}{2L - L/3} = \frac{1}{5} \left(1 + 2 \frac{\rho gL/3}{P_0} \right).$$

2.111. Поршень будет находиться в равновесии, если давление в пробирке равно $P_0 + \rho g(H - x)$. Тогда по закону Бойля — Мариотта получаем

$$[P_0 + \rho g(H - x)] xS = P'L S, \quad x^2 - \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right) x + \frac{P'L}{\rho g} = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right)^2 - \frac{P'L}{\rho g}}.$$

Определим, какое из полученных решений квадратного уравнения справедливо в условиях задачи. Для этого изобразим на графике закон Бойля — Мариотта для газа внутри пробирки: $Px = \text{const}$ (кривая 1 на рис. 2.51). На том же графике построим зависимость $P = P_0 + \rho g(H - x)$ (прямая 2). Условию равновесия поршня соответствуют точки пересечения кривой 1 и прямой 2 — точки a и b . Нетрудно видеть, что положение поршня в точке b является положением неустойчивого равновесия. Действительно, если объем газа случайно немного увеличится, гидростатическое давление уменьшится сильнее, чем давление газа в сосуде, и газ вытолкнет поршень. Если же объем немного уменьшится, то гидростатическое давление возрастет сильнее, чем давление газа, а поршень будет проваливаться внутрь пробирки до положения x_a . Из тех же соображений видно, что x_a — положение устойчивого равновесия. Итак,

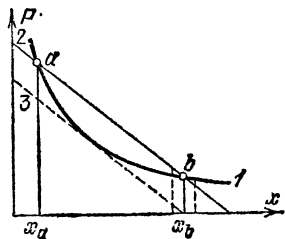


Рис. 2.51.

$$x = \frac{1}{2} \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right)^2 - \frac{P'L}{\rho g}}.$$

Задача имеет решение, если подкоренное выражение больше нуля, т. е.

$$\frac{1}{4} \left(H + \frac{P_0}{\rho g} \right)^2 - \frac{P'L}{\rho g} > 0, \text{ откуда } H > 2 \sqrt{\frac{P'L}{\rho g}} - \frac{P_0}{\rho g}.$$

На рис. 2.51 это соответствует условию, что прямая 2 проходит правее прямой 3.

2.112. $T_0 = 3TP_0/(P_0 + \rho gL/3)$.

2.113. $T_1/T = (2P_0 - \rho gL)/(2P_0 + \rho gL)$.

2.114. Давление газа $P = \rho g(H - x)$ (рис. 2.52). Его объем $V = xS$. Следовательно,

$$xS\rho g(H - x) = \frac{mRT}{\mu}, \quad x^2 - Hx + \frac{mRT}{\mu S\rho g} = 0,$$

откуда $x_{1,2} = \frac{H}{2} \pm \sqrt{\frac{H^2}{4} - \frac{mRT}{\mu S\rho g}}$. Для того чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы $mRT/\mu S\rho g \leq H^2/4$; следовательно, $T \leq H^2\mu S\rho g/4mR$.

2.115. $T_2/T_1 = 3(2P_0 + \rho gh)/8(P_0 + \rho gh)$.

2.116. При нагревании часть воздуха уходит из пробирки. Для оставшейся массы воздуха имеем

$$P_0V_0 = mRT_0/\mu, \quad PV = mRT/\mu,$$

где V_0 и V — объемы воздуха в пробирке при температурах T_0 и T . Из этих уравнений получим $P = P_0V_0T_0/VT = P_0lT_0/(l-h)T$. Запишем теперь условие равновесия столба ртути в пробирке:

$$P_0 = P + \rho gh, \quad \text{или} \quad P_0 = P_0lT_0/(l-h)T + \rho gh.$$

Отсюда

$$1 - \frac{l}{l-h} \frac{T_0}{T} = \frac{\rho gh}{P_0}, \quad \text{или} \quad T = \frac{l}{l-h} \frac{P_0}{P_0 - \rho gh} T_0.$$

Подставляя числовые значения, получим $T = 350$ К.

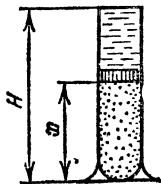


Рис. 2.52.

2.117. Рассмотрим три состояния воздуха в трубке.

1) Начальное состояние:

$$P_1 = P_0 + \rho g h, \quad V_1 = hS, \quad T_1 = T_0,$$

где S — сечение трубки.

2) Воздух нагрет до некоторой температуры T :

$$P_2 = P_0 + \rho g h_1, \quad V_2 = h_1 S, \quad T_2 = T,$$

где h_1 — высота воздушного столба при температуре T ; часть ртути вылилась из левого открытого колена.

3) Воздух снова охлажден до первоначальной температуры T_0 :

$$P_3 = P_0 + \rho g (h_2 - H), \quad V_3 = h_2 S, \quad T_3 = T_0;$$

высота воздушного столба $h_2 = h_1 - H$, так как ртуть из трубки при переходе из второго состояния в третье больше не выливалась.

В первом и третьем состояниях температура воздуха одинакова. Поэтому можно воспользоваться законом Бойля — Мариотта:

$$(P_0 + \rho g h) hS = [P_0 + \rho g (h_2 - H)] h_2 S.$$

Величина $P_0/\rho g$ имеет смысл высоты ртутного столба, соответствующей атмосферному давлению; мы будем обозначать ее через H_0 ($H_0 = 76$ см). Имеем

$$h_2^2 + (H_0 - H) h_2 - (H_0 + h) h = 0.$$

Подставляя числовые значения H_0 , H и h (в сантиметрах), найдем

$$h_2^2 + 70h_2 - 2400 = 0, \quad h_2 \approx -35 \pm 60 \text{ см.}$$

Физический смысл имеет лишь положительное решение. Таким образом, $h_2 \approx 25$ см и, следовательно, $h_1 = h_2 + H = 31$ см. Применяя теперь объединенный газовый закон к первому и второму состояниям, получим $h_1 (H_0 + h_1)/T = h (H_0 + h)/T_0$, откуда

$$T = T_0 h_1 (H_0 + h_1)/h (H_0 + h) \approx 1,38 T_0 \approx 378 \text{ K.}$$

2.118. $V_1 = V (\rho - \rho_2)/(\rho_1 - \rho_2).$

2.119. $H_1 = H + h \rho_B / \rho_L = 15,25$ см.

2.120. $H = (D/d)^2 h (\rho_d - \rho_B) / \rho_B.$

2.121. Стакан утонет, если масса воды в объеме, занимаемом воздухом на глубине h , будет равна массе стакана или меньше нее. Объем воздуха на глубине h определяется законом Бойля — Мариотта: $V = V_0 P_0 / (P_0 + \rho g h)$, где $V_0 = SH$. На критической глубине

$$\frac{\rho P_0 V_0}{P_0 + \rho g h} = M, \quad \text{откуда} \quad h = \frac{P_0}{\rho g} \left(\frac{\rho V_0}{M} - 1 \right) = 30 \text{ м.}$$

2.122. Сила тяжести стержня должна быть больше максимально возможной выталкивающей силы: $mg \geq F = \rho_B g h_2 S_2$, где уровень воды в сосуде со стержнем $h_2 = V / (S_1 - S_2)$. Получаем $m \geq 667$ г. В случае $S_2 = 80 \text{ см}^2$ имеем $h_2 = 50 \text{ см} > h_1$. Вода из сосуда будет выливаться, выталкивающая сила не может превысить величины $F' = \rho_B g h_1 S_2'$. Итак, $m' \geq 1600$ г.

2.123. Если бы шарики не были связаны, каждый из них плавал бы на такой глубине, на которой плотность воды в месте расположения центра шарика равнялась плотности шарика. Расчет дает

$$h_{10} = (\rho_1 - \rho_0) / A = 20 \text{ см}, \quad h_{20} = 40 \text{ см.}$$

Так как длина нити $l=5$ см, нить натянется. Тогда условие равновесия можно записать в виде

$$(m_1 + m_2)g = [(\rho_0 + Ah_1) + (\rho_0 + Ah_2)]gV,$$

причем $h_2 - h_1 = l$. Отсюда

$$h_1 = \frac{m_1 + m_2}{2AV} - \frac{\rho_0}{A} - \frac{l}{2} = 27,5 \text{ см}, \quad h_2 = h_1 + l = 32,5 \text{ см}.$$

$$2.124. \quad l = \frac{m_1 + m_2 - \rho_0(V_1 + V_2) - Ah_1(V_1 + V_2)}{AV_2} = 12,5 \text{ см}.$$

2.125. Разность показаний весов определяется разностью выталкивающих сил, действующих на сосуд со стороны воздуха, т. е. разностью масс воздуха в объеме, равном объему сосуда: $\Delta m = \frac{\mu P_0 V}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$. Отсюда при $P_0 = 10^5$ Па и $\mu = 29$ г/моль получим $V = 1,3$ дм³.

2.126. При взвешивании в вакууме массы пластинки и гири равны: $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$, где V_1 и V_2 — объемы пластинки и гири. Если точность взвешивания равна m_0 , то различие в результатах определения массы пластинки на весах можно заметить при условии

$$(\rho_1 - \rho_B) V_1 - (\rho_2 - \rho_B) V_2 \geq m_0,$$

где $\rho_B = \mu P_0 / RT$ — плотность воздуха. Окончательно имеем

$$m_0 \leq \mu P_0 V_1 (\rho_1 - \rho_2) / \rho_2 RT = 9 \cdot 10^{-2} \text{ кг} = 0,9 \text{ мг}.$$

$$2.127. \quad M \geq \frac{m_0 (\rho_1 - \rho_B) (\rho_2 - \rho_B)}{\rho_B (\rho_2 - \rho_1)} \approx \frac{m_0 \rho_1 \rho_2 RT}{\mu P_0 (\rho_2 - \rho_1)} = 0,33 \text{ г}.$$

2.128. Давление внутри шара равно давлению окружающего воздуха. Тогда масса вытесненного шаром воздуха $m_1 = \mu_1 PV / RT$. Но $V = m_2 RT / \mu_2 P$; следовательно, $m_1 = m_2 \mu_1 / \mu_2$. Подъемная сила $F = m_1 g - m_2 g = (\mu_1 / \mu_2 - 1) m_2 g$.

2.129. 5 шаров.

2.130. 1 моль воздуха при нормальных условиях ($P_0 = 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К) занимает объем 22,4 дм³. Следовательно, шар вытесняет 10 кмоль, или $m = 290$ кг, воздуха. Масса шара вместе с содержащимся в нем воздухом должна быть равна m . Масса оболочки $M = m/2$. Значит, воздух в шаре должен иметь массу, вдвое меньшую, чем масса вытесненного атмосферного воздуха. При одинаковых давлениях это достигается в случае, если его абсолютная температура вдвое выше температуры окружающего воздуха, т. е. равна 546 К, или 273 °С.

$$2.131. \quad F = \frac{\mu P_0 V g}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 5 \cdot 10^5 \text{ Н}, \quad \text{где } \mu = 4 \text{ г/моль — молярная}$$

масса гелия.

2.132. Условия равновесия аэростата на первой и второй высотах запишутся в виде

$$Mg = \rho_1 Vg, \quad (M - \Delta m)g = \rho_2 Vg,$$

где M — масса аэростата, ρ_1 и ρ_2 — плотности воздуха на этих высотах, Δm — масса выброшенного балласта. Из этих соотношений следует, что $\Delta m = (\rho_1 - \rho_2) V$. Выражая теперь плотности ρ_1 и ρ_2 с помощью уравнения газового состояния через температуры T_1 и T_2 и давления P_1 и P_2 , получим

$$\Delta m = \frac{\mu}{R} \left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2} \right) V = 50 \text{ кг}.$$

2.133. Плотность воздуха ($\mu_1 = 29$ г/моль) у поверхности Земли $\rho_1 = \mu_1 P_0 / RT$, а на высоте $h = 1,5$ км она составляет 0,8 от этой величины. Плотность гелия ($\mu_2 = 4$ г/моль) $\rho_2 = \mu_2 P_0 / RT$. Условие равновесия выглядит так:

$$V \cdot 0,8 (\mu_1 P_0 / RT) = V \mu_2 P_0 / RT + M.$$

Отсюда $M = (0,8\mu_1 - \mu_2) P_0 V / RT = 380$ кг.

2.134. Из уравнения газового состояния найдем

$$m_{\text{He}} = \mu_{\text{He}} P_0 V / RT_0, \quad m_{\text{в}} = \mu_{\text{в}} P_0 V / RT_0,$$

где m_{He} и $m_{\text{в}}$ — массы гелия и воздуха в объеме шара $V = 4\pi r^3/3$, μ_{He} и $\mu_{\text{в}}$ — их молярные массы. На основании закона Архимеда условие, при котором шар будет поднимать сам себя, запишется в виде

$$Mg \leq (m_{\text{в}} - m_{\text{He}})g = (\mu_{\text{в}} - \mu_{\text{He}}) P_0 Vg / RT_0,$$

где $M = 4\pi r^2 \sigma$ — масса оболочки. Отсюда $r_{\min} = 3\sigma RT_0 / P_0 (\mu_{\text{в}} - \mu_{\text{He}}) = 2,7$ м.

2.135. Запишем условие равновесия шара на заданной высоте:

$$V \cdot 0,5\mu_1 P_0 / RT = V \mu_2 P_0 / RT + M + 4\pi\sigma (3V/4\pi)^{2/3},$$

где μ_1 и μ_2 — молярные массы воздуха и гелия, σ — искомая поверхностная плотность материала. Расчет дает $\sigma = 0,3$ кг/м².

$$\mathbf{2.136.} \quad P = P_0 \frac{T}{2T_0} \left(\frac{F}{Mg} + 1 \right) \approx 46 \text{ Торр.}$$

2.137. Условие равновесия шара на максимальной высоте подъема H имеет вид

$$Mg = \rho Vg = \mu PVg / RT,$$

где ρ и P — плотность и давление воздуха на высоте H и использовано уравнение газового состояния. Отсюда $P = MRT / \mu V$. Расчет дает $P_0 / P = 16$. Таким образом, давление на максимальной высоте в 16 раз меньше, чем у поверхности Земли. Поскольку через каждые $h = 5$ км высоты давление падает в два раза, максимальная высота подъема шара окажется равной $H = 20$ км.

П р и м е ч а н и е. Легко сообразить, что давление будет изменяться с высотой по закону $P = P_0 \cdot 2^{-H/h}$, где $h = 5$ км. В нашем случае $P/P_0 = 2^{-H/h} = (16)^{-1}$. Отсюда следует, что $H = 4h = 20$ км.

2.138. Подъем шара прекратится на такой высоте, на которой масса шара вместе с оставшимся в нем водородом окажется равной массе наружного воздуха в объеме V :

$$M + \mu_1 PV / RT = \mu_2 PV / RT,$$

где $\mu_1 = 2$ г/моль и $\mu_2 = 29$ г/моль — молярные массы водорода и воздуха, P — давление на максимальной высоте H . Выражения $\mu_1 P / RT$ и $\mu_2 P / RT$ имеют смысл плотностей водорода и воздуха. Отсюда $P = MRT / (\mu_2 - \mu_1) V$. Подстановка числовых значений дает $P_0 / P = 16$, откуда следует, что максимальная высота подъема шара $H = 20$ км (см. решение задачи 2.137).

Закон сохранения энергии в тепловых процессах

2.139. При всплывании шарика на него действует разность сил Архимеда и тяжести. Их работа $A = (4\pi r^3 \rho g / 3 - mg) h$. Энергия шарика, вышедшего из воды, $E = mgh_1$. Эта энергия меньше совершенной над шариком работы сил

Архимеда и тяжести на величину работы сил трения, которая и переходит в тепло. Отсюда $Q = A - E = 2,2 \cdot 10^{-2}$ Дж.

2.140. Используя решение задачи 2.93, можно определить силу, действующую на перегородку в произвольном положении. Как нетрудно показать, сила нелинейно зависит от смещения перегородки. Поэтому работа не будет равна произведению полусуммы максимальной и минимальной сил на перемещение. Последовательный расчет работы как интеграла от силы по перемещению математически непросто. Однако задача легко решается иным путем — с использованием закона сохранения энергии.

Подсчитаем потенциальную энергию воды в начальном и конечном состояниях. Вначале центр масс воды находится на высоте $h/2$. Ее потенциальная энергия

$$U_0 = \rho S h g \cdot h/2 = \rho g S h^2/2.$$

После перемещения перегородки половина воды занимает четверть бассейна. Высота центра масс воды равна h . Ее потенциальная энергия

$$U_1 = (\rho S h/2) g h = \rho g S h^2/2.$$

Другая половина воды разлилась по площади, возросшей в 1,5 раза. Потенциальная энергия этой части воды

$$U_2 = (\rho S h/2) g h/3 = \rho g S h^2/6.$$

Из закона сохранения энергии найдем затраченную работу:

$$A = U_1 + U_2 - U_0 = \rho g S h^2/6 = 2 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

2.141. Пусть уровень жидкости во втором сосуде опустился (а в первом сосуде поднялся) на величину x . Запишем условие равновесия: $\rho_2(h-x) = \rho_2 x + \rho_1 h$. Отсюда $x = h/4$. Выделившееся количество тепла равно убыли потенциальной энергии системы:

$$Q = U_0 - U = \rho_1 g S h^2/8 = 1,25 \text{ Дж.}$$

2.142. Пусть уровень воды в правом цилиндре опустился на величину x ; тогда в левом цилиндре он поднимется на величину $y = x S_2/S_1$. Запишем условие равновесия:

$$(y+x) \rho g = mg/S_2, \text{ отсюда } x = S_1 m/S_2 \rho (S_1 + S_2).$$

Уменьшение энергии гири

$$\Delta U = mgx = S_1 m^2 g/S_2 \rho (S_1 + S_2).$$

Увеличение энергии воды

$$\Delta U_B = \rho g x S_2 (y+x)/2 = mgx/2.$$

Выделившееся количество тепла равно убыли потенциальной энергии системы: $Q = \Delta U - \Delta U_B = mgx/2 = S_1 m^2 g/2 \rho S_2 (S_1 + S_2) = 0,08 \text{ Дж.}$

2.143. Найдя положение равновесия понтона, можно подсчитать уменьшение его потенциальной энергии и прирост потенциальной энергии вытесненной им воды. При этом, учитывая большие размеры водоема, полагаем, что вытесненная вода разливается по его поверхности слоем пренебрежимо малой толщины, так что положение ее центра масс соответствует положению поверхности водоема. Для изменения потенциальной энергии и, следовательно, выделяющегося количества тепла получаем $\Delta U = Q = 3mgh/8 = 2800 \text{ Дж.}$

2.144. $Q = mgh/4 = 5000 \text{ Дж.}$

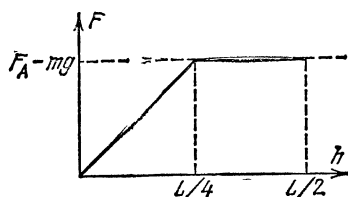


Рис. 2.53.

2.145. Разность сил Архимеда и тяжести, которую нужно преодолевать внешней силой F , вначале меняется по линейному закону, а затем, после полного погружения бруска, остается постоянной (рис. 2.53). При такой зависимости силы от перемещения нетрудно подсчитать работу:

$$A = (\rho_0 - \rho)gL S_1 \frac{L}{4} \cdot \frac{3}{2}.$$

Тот же ответ можно получить из закона сохранения энергии, как это сделано, например, при решении задачи 2.142.

2.146. Количество тепла Q , выделившееся при ударе, равно уменьшению кинетической энергии пули. Это количество тепла пошло на нагревание пули до температуры плавления и на расплавление части пули:

$$Q = m_0 (v_0^2 - v^2)/2 = m_0 c (T - T_0) + \lambda m,$$

где m_0 — масса пули, m — масса расплавившейся части пули. Отсюда

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{v_0^2 - v^2}{2} - c(T - T_0) \right] = 0,015.$$

2.147. Если за время τ масса m воды нагрелась от температуры T_1 до температуры T_2 , то при удельной теплоемкости c это потребовало подвода мощности $N = mc (T_2 - T_1)/\tau$. При той же подводимой мощности для испарения воды необходимо время

$$\tau' = mq/N = q\tau/c (T_2 - T_1) = 60 \text{ мин},$$

где $q = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг — удельная теплота испарения воды, $c = 4200$ Дж/(кг · К) — ее удельная теплоемкость.

2.148. Изменение уровня воды произойдет из-за того, что объем воды зависит от температуры. Если не учитывать теплового расширения, то изменения уровня воды вообще не будет, так как лед вытеснит точно такой же объем воды, какой он займет, когда растает.

Чтобы найти изменение объема воды, составим уравнение теплового баланса:

$$\lambda m + mc (T - T_0) = Mc (T_1 - T),$$

где M — масса воды в калориметре, c — удельная теплоемкость воды. Из этого уравнения найдем установившуюся температуру T :

$$T = \frac{MT_1 + mT_0 - m\lambda/c}{m + M}.$$

Обозначая через V_0 объем воды и льда массы $m + M$ при температуре T_1 , найдем изменение объема и соответствующее изменение уровня воды из уравнения $\Delta V = V_0 \beta (T - T_1)$:

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{V_0 \beta}{S} \left(\frac{MT_1 + mT_0 - m\lambda/c}{m + M} - T_1 \right) = -0,95 \text{ мм}.$$

Таким образом, уровень воды в калориметре понизится на величину $\Delta h = 0,95$ мм.

2.149. Поршень сдвинется, когда сила давления азота на поршень уравновесит силу тяжести поршня, силу внешнего давления и силу трения F : $P_1 S = Mg + P_0 S + F$. Повышение температуры газа в нашем случае $\Delta T = Q/mc_V$.

Из уравнения газового состояния имеем при постоянном объеме

$$P_1 = PT_1/T = P(1 + \Delta T/T) = P(1 + Q/mc_V T).$$

Следовательно,

$$F = (P_1 - P_0)S - Mg = [P(1 + Q/mc_V T) - P_0]S - Mg.$$

2.150. Из условий задачи ясно, что количества тепла, отнимаемые водой, протекающей по змеевику, одинаковы в двух рассматриваемых случаях. Масса протекающей воды пропорциональна скорости; значит, можно записать $v_1(T_1 - T_0) = v_2(T_2 - T_0)$; отсюда $T_2 = T_0 + (T_1 - T_0)v_1/v_2$.

2.151. Масса испарившейся в единицу времени воды $m_\tau = N/q$, где $q = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг — удельная теплота испарения воды. Объем образовавшегося за единицу времени пара находится по уравнению газового состояния: $V_\tau = m_\tau RT/\mu P = NRT/q\mu P$, где $P = 10^5$ Па — давление водяного пара при температуре $t = 100^\circ\text{C}$ ($T = 373$ К — абсолютная температура кипящей воды). С другой стороны, этот объем равен произведению скорости истечения пара v на площадь сечения носика S . Таким образом, $v = NRT/q\mu PS = 7,5$ м/с.

2.152. Так как температура утюга в установившемся режиме практически постоянна, количество тепла, получаемое утюгом за время τ , отдается им за время $\tau + T$. Количество тепла, отдаваемое в окружающую среду, пропорционально разности температур тела и среды. Сравнивая два режима, имеем $(\tau + T_1)(t_1 - t_0) = (\tau + T_2)(t_2 - t_0)$. Отсюда

$$t_2 = t_0 + \frac{\tau + T_1}{\tau + T_2}(t_1 - t_0) = 208,5^\circ\text{C}.$$

$$2.153. T_2 = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} \frac{\tau_2}{\tau_1} (\tau_1 + T_1) - \tau_2 = 3,8 \text{ мин.}$$

2.154. Из уравнения газового состояния найдем, что в баке находилось $\nu = 0,4$ моль, или $m = 11,6$ г, воздуха. Масса бензина намного меньше массы воздуха; поэтому можно считать, что и после реакции в баке находится практически чистый воздух. Из уравнения теплового баланса имеем $qm_0 = C\nu(T_1 - T_0)$, где T_1 — температура в конце реакции. Давление найдем из уравнения газового состояния: $P = P_0 T_1/T_0 = 2,7 \cdot 10^5$ Па.

2.155. Подводимое тепло идет на увеличение внутренней энергии газа: $Q = \nu C_V(T_1 - T)$. В сосуде установится температура $T_1 = T(1 + Q/\nu C_V T)$. Из закона Шарля найдем искомое давление: $P_1 = P(1 + Q/\nu C_V T)$. Количество газа легко найти из уравнения газового состояния: $\nu = PV/RT$. Окончательно имеем $P_1 = P(1 + QR/C_V PV) = 2 \cdot 10^5$ Па.

$$2.156. Q = 2PVC_V/R = 5470 \text{ Дж.}$$

2.157. Давление газа под поршнем постоянно и равно $P = P_0 + Mg/S$. Работа газа по поднятию поршня $A = F(h_2 - h_1) = PS(h_2 - h_1) = P(V_2 - V_1)$. Выражая изменение объема $\Delta V = V_2 - V_1$ через изменение температуры газа (при постоянном давлении), найдем с помощью уравнения газового состояния $\Delta V = V_2 - V_1 = A/P = 16,7$ дм³ и $A = mR(T_2 - T_1)/\mu = 1715$ Дж. Обратим внимание на то, что в выражение для работы не вошли параметры состояния P и V .

При нагревании при постоянном объеме все тепло идет на изменение внутренней энергии газа. Поэтому коэффициент пропорциональности между температурой и внутренней энергией имеет смысл теплоемкости при постоянном объеме: $\Delta U = C_V \Delta T$. При постоянном давлении 1 моль идеального газа при

нагревании на величину ΔT совершает, как мы только что выяснили, работу $R\Delta T$. Значит, для идеального газа молярная теплоемкость при постоянном давлении на величину R больше чем C_V :

$$C_P = C_V + R.$$

2.158. Работа газа $A = P(V_2 - V_1)$. Но $P(V_2 - V_1) = mR(T_2 - T_1)/\mu$. Затраченное тепло $Q = mc_P(T_2 - T_1)$, откуда $m(T_2 - T_1) = Q/c_P$. Итак, $A = QR/\mu c_P = 1,37 \cdot 10^3$ Дж. Если воспользоваться решением предыдущей задачи, последнее соотношение можно записать сразу.

2.159. Работа газа $A = P(V_1 - V_2)$. Таким образом, $V_2 = V_1 - A/P$, $T_2/T_1 = V_2/V_1$; следовательно,

$$T_2 = T_1 V_2/V_1 = T_1 - AT_1/PV_1, \quad \Delta T = T_2 - T_1 = -AT_1/PV_1.$$

Подставляя числовые значения, находим $\Delta T = -9,5$ К.

2.160. Используя решение задачи 2.156, найдем $m = \mu A/R(T_2 - T_1)$. Расчет дает $m = 0,23$ г.

2.161. $Q = m(C_V + R)(T_2 - T_1)/\mu = 109$ Дж, где $\mu = 28$ г/моль — молярная масса азота.

2.162. Так как процесс происходит при постоянном давлении, можно записать

$$Q = \nu C_P(T_1 - T_0) = \nu(C_V + R)T_0(V_1/V_0 - 1),$$

где $C_V = 21$ Дж/(моль · К) — молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме. Расчет дает $V_1/V_0 = 4$.

2.163. $T_0 = 286$ К.

2.164. Установившаяся температура определяется из уравнения теплового баланса: $t = (m_1 t_1 + m_2 t_2)/(m_1 + m_2) = 17^\circ\text{C}$. Теперь можно определить давления в каждой части сосуда:

$$P_1 = \frac{m_1}{\mu} \frac{2RT}{V} = 8,5 \cdot 10^4 \text{ Па}, \quad P_2 = 1,27 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

2.165. Учитывая равенство давлений, запишем отношение количеств газа в сосудах: $\nu_1/\nu_2 = V_1 T_2/V_2 T_1$. Уравнение теплового баланса теперь можно записать так: $\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2 = (\nu_1 + \nu_2) T$. Решая полученную систему, находим $T_2 = 525$ К.

2.166. Из соотношения $\nu_0/(\nu_0 + \nu) = P_0/P$ получаем, что количество впрыснутого азота ν составляет $1/2$ от первоначального количества азота в сосуде ν_0 . Пренебрегая теплообменом за время испарения жидкого азота, запишем уравнение теплового баланса на момент окончания испарения:

$$\nu C_V(t_0 - t_2) = \nu q/2 + \nu(t_2 - t_1)/2.$$

Отсюда получим $q = 5500$ Дж/моль.

2.167. Из уравнения теплового баланса (см. решение задачи 2.166) получим температуру сразу после испарения жидкого азота:

$$t_2 = \frac{C_V t_0 + 0,3 C_V t_1 - 0,3 q}{1,3 C_V} = -91^\circ\text{C}.$$

Отсюда $P_2 = PT_2/T_0 = 8,1 \cdot 10^4$ Па.

2.168. Из уравнения процесса следует, что отношение объема к температуре является постоянной величиной. Но тогда и давление во всем процессе постоянно, и работу можно записать в виде

$$A = P(V_2 - V_1) = P_2 V_1(T_2/T_1 - 1) = 100 \text{ Дж}.$$

2.169. Отношение давления к объему в рассматриваемом процессе постоянно: $P/V = P_0/V_0$. Комбинируя полученную пропорцию с уравнением газового состояния для одного моля $PV = RT$, получаем $T = P_0 V^2 / R V_0$. Работа равна заштрихованной площади под прямой, изображающей процесс на PV -диаграмме (рис. 2.54): $A = 3P_0 V_0 / 2$.

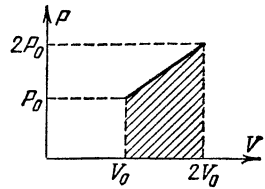


Рис. 2.54.

2.170. Температура, а следовательно, и внутренняя энергия газа растут (см. решение задачи 2.169). Кроме того, расширяясь, газ совершает работу. Значит, для осуществления такого процесса необходим подвод тепла. Изменение внутренней энергии газа $\Delta U = 5R\Delta T/2$. Подсчитаем работу. Исключая из уравнения процесса и уравнения состояния P , получаем связь между T и V : $RT = \alpha V^2$. Запишем то же соотношение для конечного состояния: $R(T + \Delta T) = \alpha(V + \Delta V)^2$. Вычитая из второго равенства первое и пренебрегая членом, содержащим квадрат малой величины ΔV , получаем $\Delta V = R\Delta T / 2\alpha V$. Тогда для работы имеем $A = P\Delta V = \alpha V\Delta V = R\Delta T/2$. Сумма изменения внутренней энергии и работы есть подведенное тепло: $Q = \Delta U + A = 3R\Delta T$.

2.171. Используя уравнение газового состояния, получим $P = mR\alpha V/\mu$. Для искомой работы (см. решение задачи 2.169) получаем $A = mR\alpha (V_2^2 - V_1^2)/2\mu$.

2.172. $A = mR(T_2 - T_1)/2\mu$.

2.173. Работа на изобаре $A = P(V_2 - V_1) = RT(V_2/V_1 - 1)$. Так как $T_1 = T_3 = T$, $P_1 = P_2$, $V_3 = V_2$, можно записать $V_1 P_1 = V_3 P_3$, или $V_2/V_1 = P_2/P_3 = k$. Окончательно имеем $T = A/R(k - 1)$.

2.174. Работа на изобаре $A = P_2(V_3 - V_2) = P_3 V_3(1 - V_2/V_3) = RT(1 - V_3/V_2)$. Аналогично предыдущей задаче получим $P_1/P_2 = V_3/V_2 = RT/(RT - A)$.

2.175. $Q = C_P(2T_0 - T_0) + C_V(4T_0 - 2T_0) = 3C_V T_0 + RT_0 = 20 \text{ кДж}$.

2.176. $t_3 = t_1 + Q/C_V - Q/(C_V + R) = 77,2^\circ \text{C}$.

2.177. Работа, совершенная над газом, равна площади под графиком процесса на PV -диаграмме. Так как давление не должно падать ниже начального, всю работу надо совершить при начальном давлении — по изобаре, по которой газ достигает конечного объема, а затем по изохоре перевести его в конечное состояние. Расчет дает

$$Q = -C_P(T - T/2) + C_V(3T - T/2).$$

Учитывая, что молекула одноатомного газа имеет три (поступательных) степени свободы, т. е. его энергия в расчете на моль равна $3RT/2$, получаем $Q = 5RT_0/2 = 6225 \text{ Дж}$.

2.178. Молекула двухатомного газа имеет пять степеней свободы — три поступательные и две вращательные. Так как энергия, приходящаяся на одну степень свободы, в расчете на моль равна $RT/2$, для моля двухатомного газа теплоемкость при постоянном объеме $C_V = 5R/2$. С учетом этого имеем

$$Q = C_P(2T - T) + C_V(T/3 - 2T) = -2RT/3 = -1690 \text{ Дж}.$$

Таким образом, в этом процессе от газа отводится количество тепла $Q = 1690 \text{ Дж}$.

2.179. Работа совершается на участке 1—2 и на участке 3—4. Так как давление на этих участках постоянно, то

$$A_{12} = P_1(V_2 - V_1), \quad A_{34} = P_2(V_1 - V_2).$$

Из уравнения газового состояния имеем

$$P_1V_2=RT_2, \quad P_1V_1=RT_1, \quad P_2V_2=RT_3.$$

Комбинируя эти равенства, находим $P_2V_1=RT_1T_3/T_2$. Полная работа за цикл

$$A=A_{12}+A_{34}=-R(T_3-T_2)(1-T_1/T_2).$$

Знак минус означает, что на участке 3—4 над газом совершена большая работа, чем работа газа на участке 1—2.

2.180. Работа, совершенная газом за цикл (рис. 2.34), равна площади под графиком процесса на PV -диаграмме:

$$A=(P_2-P_1)(V_2-V_1)=P_1V_1+P_2V_2-(P_1V_2+P_2V_1).$$

Из уравнения газового состояния для точек 1, 2, 3 и 4 получим

$$P_1V_1=RT_1, \quad P_2V_1=RT, \quad P_2V_2=RT_3, \quad P_1V_2=RT,$$

где T — неизвестная температура газа в состояниях 2 и 4. Поделив почленно первое равенство на второе и третье равенство на четвертое, получим соотношения для изохор 1—2 и 3—4:

$$P_1/P_2=T_1/T, \quad P_2/P_1=T_3/T, \quad \text{откуда} \quad T=\sqrt{T_1T_3}.$$

Теперь для работы, совершенной газом за цикл, получим

$$A=R(T_1+T_3-2\sqrt{T_1T_3})=R(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_3})^2.$$

2.181. Обозначим температуру в состоянии 1 (P_0, V_0) через T_0 (рис. 2.35). Тогда температуры в других состояниях $T_2=2T_0, T_3=6T_0, T_4=3T_0$. В первом цикле (1—2—3—1) газ получает тепло на изохоре 1—2 и на изобаре 2—3. Полное количество тепла, полученное молекул одноатомного газа ($C_V=3R/2$),

$$Q_1=C_VT_0+C_P \cdot 4T_0=23RT_0/2.$$

Работа равна площади треугольника 1—2—3:

$$A=(P_0/2) \cdot 2V_0=P_0V_0=RT_0.$$

К. п. д. цикла равен отношению работы за цикл к полному количеству тепла, полученному от нагревателя: $\eta_1=A/Q_1=2/23$.

Из анализа первого цикла можно найти количество тепла, отданное холодильнику на участке 3—1: $Q_{31}=Q_1-A=21RT_0/2$. Но во втором цикле (1—3—4—1) газ получает тепло на том же участке, проходя его в противоположном направлении. На участках 3—4 и 4—1 газ отдает тепло; значит, во втором цикле всего получено от нагревателя количество тепла $Q_2=Q_{13}=\equiv 21RT_0/2$. Работа во втором цикле, так же как и в первом, равна RT_0 . Итак, к. п. д. второго цикла $\eta_2=A/Q_2=2/21$.

Отношение к. п. д. циклов $\eta_2/\eta_1=23/21$.

2.182. Пусть S — сечение цилиндра. Тогда перемещение поршня $h=\equiv (V_1-V_2)/S$, где V_1 и V_2 — начальный и конечный объемы газа. Изменение потенциальной энергии поршня идет на увеличение внутренней энергии газа:

$$Mg(V_1-V_2)S=\nu C_V(T_2-T_1),$$

где M — масса поршня, ν — количество газа, C_V — молярная теплоемкость, T_1 и T_2 — начальная и конечная температуры газа. Учитывая, что конечное давление $P_2=Mg/S$, и используя уравнение газового состояния, получим

$$\nu C_V(T_2-T_1)=P_2(V_1-V_2)=\nu RT_2(V_1/V_2-1).$$

Расчет дает $T_2/T_1=5/3$.

2.183. Пусть газ, который в конце процесса оказывается в сосуде, первоначально занимает объем V при давлении P . Тогда при вытеснении его в сосуд окружающий газ совершает работу $A = PV = mRT_0/\mu$. Эта работа идет на повышение внутренней энергии газа:

$$mRT_0/\mu = mC_V(T - T_0)/\mu.$$

Для одноатомного газа $C_V = 3R/2$; следовательно, $T = 5T_0/3$.

2.184. Покажем, что в данном процессе теплоемкость газа равна теплоемкости при постоянном давлении C_P . Пусть перед нагревателем давление и температура воздуха равны P_1 и T_1 , а за нагревателем P_2 и T_2 . Изменение внутренней энергии моля воздуха $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$. Последующие порции газа, вытесняя моль газа при давлении P_1 , совершают над ним работу $A_1 = P_1V_1 = RT_1$, где V_1 — молярный объем воздуха перед нагревателем. Газ совершает работу при давлении P_2 : $A_2 = P_2V_2 = RT_2$, где V_2 — молярный объем воздуха за нагревателем. Полная работа, совершенная газом,

$$A = A_2 - A_1 = R(T_2 - T_1) = R\Delta T.$$

По первому закону термодинамики подведенное к газу количество тепла

$$Q = \Delta U + A = (C_V + R)\Delta T.$$

Теперь нетрудно рассчитать мощность нагревателя:

$$N = (C_V + R)m_{\tau}\Delta T/\mu = C_P m_{\tau}\Delta T/\mu = 10^3 \text{ Вт},$$

где $C_P = 29,3 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ — молярная теплоемкость воздуха при постоянном давлении.

2.185. При перемещении из области с давлением P_1 в область с давлением P_2 воздух совершает работу против силы внешнего давления (см. решение задачи 2.184):

$$A_1 = P_2V_2 - P_1V_1 = R(T_2 - T_1) = R\Delta T.$$

Кроме того, поднимающийся воздух совершает работу против силы тяжести: $A_2 = \mu gh$, где $\mu = 29 \text{ г}/\text{моль}$ — молярная масса воздуха, $h = 100 \text{ м}$. Так как теплообмена нет, вся работа совершается за счет убыли внутренней энергии:

$$C_V(T_1 - T_2) = R(T_2 - T_1) + \mu gh.$$

Отсюда $\Delta T = \mu gh/(C_V + R) = \mu gh/C_P \approx 1 \text{ К}$.

Насыщенные и ненасыщенные пары

2.186. $\rho = \mu P/RT = 0,012 \text{ г}/\text{м}^3$.

2.187. Масса сконденсировавшейся воды $m = \rho h \pi d^2/4$, где $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ — плотность воды. Эта вода ранее находилась в виде насыщенного пара в объеме $V = H \pi D^2/4$. Из уравнения газового состояния найдем

$$P = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} = \frac{\rho}{\mu} \frac{h}{H} \left(\frac{d}{D}\right)^2 RT = 2,13 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

2.188. Масса пара в трубке при температуре $t_1 = 150^\circ \text{C}$ $m_1 = \mu P_1 V/RT_1 = 16,4 \text{ мг}$. Масса насыщенного пара при температуре $t_2 = 22^\circ \text{C}$ $m_2 = \mu P_2 V/RT_2 = 7,5 \text{ мг}$. Значит, сконденсируется $m = 8,9 \text{ мг}$ воды.

2.189. $\Delta m/m = \mu PV/mRT = 0,17$.

2.190. Температура $T = 373 \text{ К}$ — точка кипения воды при нормальном давлении. Кипение начинается тогда, когда давление насыщенного пара становится равным атмосферному ($P_0 = 10^5 \text{ Па}$). Учитывая это, имеем $m = \mu P_0 V / RT = 5,9 \text{ г}$.

2.191. $\Delta m = m - \mu PV / 2RT = 0,64 \text{ г}$.

2.192. Над кипящей водой находится ее насыщенный пар, давление которого равно атмосферному ($P_0 = 10^5 \text{ Па}$). Поэтому весь воздух из термоса вытеснен водяным паром. После охлаждения под крышкой — практически вакуум (точнее, насыщенный пар при комнатной температуре; его давление мало по сравнению с P_0). Разность давлений, действующая на крышку, близка к P_0 . Отсюда $F = P_0 \pi D^2 / 4 = 70,7 \text{ Н}$.

2.193. Поршень будет в равновесии, когда сумма действующих на него сил равна нулю: $PS = P_0 S + Mg$; следовательно, $P = P_0 + Mg / S = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$. При температуре $t_0 = 0^\circ \text{С}$ давление насыщенного пара меньше P ; поэтому вся вода сконденсирована. При температуре $t = 200^\circ \text{С}$ давление насыщенного пара больше P , поэтому вся вода испарится, и пар будет расширяться до тех пор, пока его давление не станет равным P . Его объем при этом $V = mRT / \mu PS$. Высота, на которую поднимется поршень, $h = V / S = mRT / \mu PS = 1,9 \text{ м}$.

2.194. $h = \Delta h (t_0 - t) / \Delta t = 5,6 \text{ км}$, где $t_0 = 100^\circ \text{С}$.

2.195. При температуре $t = 100^\circ \text{С}$ насыщенный пар воды имеет давление $P_0 = 10^5 \text{ Па}$. 1 моль газа при таком давлении и температуре $t_0 = 0^\circ \text{С}$ занимает объем $V_0 = 22,4 \text{ дм}^3 / \text{моль}$, а при температуре $t = 100^\circ \text{С}$ — еще больший объем. Объем всего сосуда по условию задачи $V = 20 \text{ дм}^3$; следовательно, вода испариться не может. Наряду с остатком воды в левой части сосуда будет ее насыщенный пар; давление окажется равным P_0 . Таким же будет и давление азота. Занимаемый азотом объем $V_a = \nu_a RT / P_0 = 15,3 \text{ дм}^3$.

2.196. Предположим, что вся вода испарится. Давления и температуры водяного пара и азота должны быть одинаковыми; следовательно, они займут объемы, пропорциональные количеству вещества ν . На долю азота придется объем $V_a = 40 \text{ дм}^3$. Необходимо проверить, что водяной пар не насыщен. Объем $V_v = 80 \text{ дм}^3$ занимают $\nu_v = 2 \text{ моль}$ водяного пара. Давление $P = \nu_v RT / V = 7,65 \cdot 10^4 \text{ Па} < 10^5 \text{ Па}$. Пар не насыщен, наше предположение было правильным.

2.197. Максимальное давление, которое может иметь водяной пар при температуре $t = 100^\circ \text{С}$, $P_0 = 10^5 \text{ Па}$. При равновесии азот должен иметь то же давление. Его объем $V_a = m_a RT / \mu_a P_0 = 2,18 \text{ дм}^3$. Это превышает полный объем сосуда. Следовательно, вода сконденсируется и азот займет весь объем (за вычетом части, занятой жидкостью).

2.198. Давление воздуха в сосуде при температуре $t_1 = 76^\circ \text{С}$ $P_1 = P_0 - P = 6 \cdot 10^4 \text{ Па}$. При температуре $T_2 = 80 \text{ К}$ полное давление равно давлению воздуха: $P_2 = P_1 T_2 / T_1 = 13,7 \text{ кПа}$.

2.199. Так как при вертикальном положении цилиндра в сосуде имеется вода, водяной пар — насыщенный и его давление $P_0 = 10^5 \text{ Па}$. Избыточное давление, создаваемое поршнем, $\Delta P = Mg / S = 2,45 \cdot 10^3 \text{ Па}$ уравнивается давлением воздуха, находящегося под поршнем. При горизонтальном положении цилиндра поршень уравнивается полным давлением в сосуде, равным атмосферному. Так как в цилиндре есть воздух, давление водяного пара будет ниже атмосферного и вся вода испарится. Давление воздуха мало по сравнению с атмосферным, поэтому приближенно давление водяного пара и во втором случае практически равно P_0 , и, следовательно, масса испарившейся воды

примерно равна массе насыщенного пара при температуре $T = 373 \text{ К}$ в объеме $S \Delta h$: $m = \mu P_0 S \Delta h / RT = 0,7 \text{ г}$.

Более точный расчет требует учета изменения давления воздуха: $\Delta P' = \Delta P h / (h + \Delta h) = 2,13 \cdot 10^3 \text{ Па}$. При этом следует для атмосферного давления взять более точную цифру: $P_0 = 1,0133 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Массу испарившейся воды тогда вычислим как разность масс (при температуре $T = 373 \text{ К}$), взятых в объеме $S(h + \Delta h)$ при давлении $P_0 - \Delta P'$ и в объеме $S h$ при давлении P_0 :

$$\Delta m = \frac{\mu S}{RT} (P_0 \Delta h - \Delta P' h - \Delta P' \Delta h) = 0,59 \text{ г}.$$

2.200. Давление влажного воздуха в сосуде складывается из давлений воздуха и пара: $P = P_v + P_n$, $P_v = P_0 T / T_0 = 1,37 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Считая пар идеальным газом и предполагая, что вся вода испарится, найдем $P_n = mRT / \mu V = 5,1 \cdot 10^4 \text{ Па}$. Так как давление насыщенного пара при температуре $t = 100^\circ \text{С}$ $P_0 = 10^5 \text{ Па}$, пар не насыщен, и, следовательно, наше предположение было правильным. Таким образом, $P = 1,88 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

2.201. Предположим, что весь сухой лед испарится. Тогда $P = mRT / \mu V = 2,7 \cdot 10^4 \text{ Па}$. Это давление меньше давления насыщенного пара; значит, наше предположение верно. Давление в камере $P_k = 1,27 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

2.202. Клапан откроется, когда разность давлений внутри и вне сосуда создаст силу, равную упругой силе пружины клапана: $(P_v + P_n - P_0) S = F$, где P_v — давление воздуха и P_n — давление насыщенного пара воды при температуре T . По закону Шарля $P_v = P_{v0} T / T_0$, где $P_{v0} = 96,4 \text{ кПа}$ — давление воздуха при температуре T_0 (из $P_0 = 100 \text{ кПа}$ полного давления $P_{n0} = 3,6 \text{ кПа}$ дает насыщенный водяной пар). Из этих соотношений получаем $P_n = F / S + P_0 - P_{v0} T / T_0 = 8,3 \cdot 10^4 \text{ Па}$.

2.203. Давление воздуха P_v при искомой температуре можно рассчитать по закону Шарля: $P_v = P_0 T / T_0$, а давление ненасыщенного пара воды P_n — из уравнения газового состояния: $P_n = mRT / \mu V$. Запишем условие открытия клапана: $(P_v + P_n - P_0) S = F$. Таким образом,

$$T = \frac{F/S + P_0}{P_0/T_0 + mR/\mu V} = 385 \text{ К}.$$

2.204. Давление водяного пара в сосуде $P_1 = 0,6 \cdot 3 = 1,8 \text{ кПа}$. Дополнительно нужно создать давление $P_2 = 1,2 \text{ кПа}$. Масса воды, создающая такое давление, найдется из уравнения газового состояния: $m = \mu P_2 V / RT = 6,2 \text{ г}$.

2.205. Первоначальная масса водяного пара в сосуде $m_1 = \mu P_1 V / RT = 0,9 \text{ г}$, где $P_1 = \alpha_1 P$. При введении еще $m = 1 \text{ г}$ воды масса станет равной $m_2 = 1,9 \text{ г}$ и давление $P_2 = m_2 RT / \mu V = 2,67 \text{ кПа}$. Относительная влажность $\alpha_2 = P_2 / P = 0,63$, т. е. 63% .

2.206. При неизменной температуре давление пара пропорционально плотности. Поэтому относительная влажность $\alpha = P / P_n = \rho / \rho_n$. Плотность пара будет равна сумме плотностей, которые создает пар из объемов V_1 и V_2 : $\rho = \rho_1 + \rho_2 = (\alpha_1/3 + 2\alpha_2/3) = 0,27 \rho_n$. Относительная влажность $\alpha = 27 \%$.

2.207. Полное давление в комнате при повышении температуры не изменилось; следовательно, $P_{v1} + P_{n1} = P_{v2} + P_{n2}$. Поскольку из комнаты ушли одинаковые части воздуха и пара, можно записать $P_{v1}/P_{n1} = P_{v2}/P_{n2}$. Отсюда следует, что при повышении температуры каждое из давлений P_v и P_n осталось неизменным. Таким образом,

$$P_{n1} = \alpha_1 P_1 = P_{n2} = \alpha_2 P_2, \quad \alpha_2 = \alpha_1 P_1 / P_2 = 0,36.$$

2.208. Давление пара воды при влажности $\alpha = 70\%$ составляло $P_{\text{пл}} = \alpha P = 1,68$ кПа; следовательно, давление воздуха было $P_{\text{в1}} = 11,62$ кПа. При изотермическом сжатии давление воздуха возрастет в 10 раз: $P_{\text{в2}} = 116,2$ кПа. Пар при уменьшении объема станет насыщенным, и часть воды сконденсируется. Полное давление в цилиндре после сжатия $P_2 = 118,6$ кПа. Уменьшение объема за счет сконденсировавшейся воды можно не учитывать, так как общий объем $V_2 = 1$ дм³, а объем сконденсировавшейся воды даже при полной конденсации $V_{\text{в}} = m/\rho = \mu PV_2/\rho RT = 0,11$ см³.

2.209. Давление водяного пара, пока не началась его конденсация, будет изменяться пропорционально общему давлению. Поэтому в конечном состоянии, когда началась конденсация, его давление было в 60 раз больше начального давления. Таким образом, начальное давление пара $P_2 = 1,67$ кПа, а относительная влажность $\alpha = 72\%$.

2.210. $V_2/V_1 = T_2(P_0 - P_1)/T_1(P_0 - P_2) = 0,91$, где V_1 , T_1 и P_1 — объем шарика, температура и давление насыщенного пара воды в комнате; V_2 , T_2 и P_2 — на улице.

2.211. Столбик ртути высоты 1 мм создает давление 1 Торр. Значит, после поворота пробирки давление в ней (в торрах) станет численно равным $P_0 + l$, где l — высота столбика ртути (в миллиметрах). Пока пар ненасыщенный, он ведет себя как идеальный газ. Его давление, а следовательно, и относительная влажность при постоянной температуре пропорциональны общему давлению: $\alpha_2 = \alpha_1(P_0 + l)/P_0 = 0,63$.

2.212. Найдем количества водорода и кислорода:

$$\nu_{\text{в}} = \frac{P_{\text{в}}V}{RT} = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ моль}, \quad \nu_{\text{к}} = \frac{P_{\text{к}}V}{RT} = 2,75 \cdot 10^{-3} \text{ моль}.$$

Таким образом, весь водород и кислород прореагируют и образуется $\nu = 5,5 \cdot 10^{-3}$ моль воды. Давление водяного пара после остывания не может превышать $P = 23$ гПа; следовательно, в парообразном состоянии будет находиться $\nu_1 = P \cdot 2V/RT = 10^{-3}$ моль воды. Итак, сконденсируется $\nu_2 = 4,5 \cdot 10^{-3}$ моль, или $m_2 = 81$ мг, воды.

2.213. Предположим, что первоначально в камере находятся ν моль водорода и ν моль кислорода (всего 2ν моль газа). Прореагируют ν моль водорода и $\nu/2$ моль кислорода, образуя 1 моль воды. Останется $\nu/2$ моль кислорода.

Всего в камере останется $3\nu/2$ моль газа. Давление $P_2 = P_1 \frac{3/2 T_2}{2 T_1} = 1,02 \cdot 10^5$ Па. Легко проверить, что водяной пар не конденсируется.

2.214. Прореагируют половина метана и весь кислород. Если всего в начале было 2ν моль, то останется $\nu/2$ моль CH_4 и образуется $\nu/2$ моль CO_2 . Они создают давление $P'_2 = 500$ гПа. К этому следует добавить давление насыщенного пара воды. Всего получим $P_2 = 523$ гПа. Предоставляем читателю проверить, что часть водяного пара сконденсируется.

2.215. Так как перегородка проницаема для водорода, он равномерно заполнит все пространство между поршнями — его давления слева и справа от перегородки будут одинаковы. Давление водяного пара, следовательно, будет меньше $P_0 = 10^5$ Па. Он будет ненасыщенным, и его можно рассматривать как идеальный газ. Из равенства полных давлений следует, что давления азота и воды (водяного пара) будут одинаковы. Занимаемые ими объемы будут пропорциональны их количествам. Количества водорода, находящиеся в разных

частях сосуда, пропорциональны их объемам. Итак, слева от перегородки находятся $1/2$ моль азота и $(1/3) \cdot (1/2) = 1/6$ моль водорода, всего $2/3$ моль при температуре $T = 373$ К и давлении $P_0 = 10^5$ Па. Искомый объем

$$V = 22,4 \text{ дм}^3/\text{моль} \cdot \frac{373 \text{ К}}{273 \text{ К}} \cdot \frac{2}{3} \text{ моль} = 20,4 \text{ дм}^3.$$

2.216. При температуре $T = 373$ К давление насыщенного пара воды равно $P_0 = 10^5$ Па. При таких условиях 3 моль газа должны занимать объем $V = 91,8 \text{ дм}^3$. Но вода находится в объеме $V_n = 81,6 \text{ дм}^3$; значит, она испарится не вся, и давление водяного пара равно $P_0 = 10^5$ Па. Сила F должна уравновесить силу давления водорода. Водород займет весь объем между поршнями; его давление $P_v = RT/(V_n + V_p)$, где V_n — объем левой части сосуда. Азот останется в левой части; его давление $P_a = RT/V_n$. При написании этих уравнений учтено, что сосуд содержит по 1 моль азота и водорода. Общее давление в левой части сосуда $P_v + P_a = P_0$. Решая полученную систему уравнений, находим $P_v = 3 \cdot 10^4$ Па, $F = 300$ Н.

2.217. Отношение плотностей водяного пара в июле и ноябре $\rho_2/\rho_1 = \alpha_2 P_2 T_1 / \alpha_1 P_1 T_2 = 3,4$. В июле водяного пара в 3,4 раза больше.

$$2.218. \rho_v/\rho_m = \mu_v P_v / \mu_m P_m = 190.$$

$$2.219. \rho/\rho_0 = P T_0 / P_0 T = 1,9.$$

2.220. Давление влажного воздуха складывается из давления водяного пара $P_n = 0,8 \cdot 44,6 = 35,7$ Торр и давления собственно воздуха $P_v = P_0 - P_n = 724,3$ Торр. Плотности пара и воздуха при температуре $T = 309$ К

$$\rho_n = \frac{\mu_n P_n}{RT} = 3,34 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3, \quad \rho_v = \frac{\mu_v P_v}{RT} = 1,09 \text{ кг/м}^3.$$

Полная плотность равна сумме плотностей пара и воздуха: $\rho = \rho_n + \rho_v = 1,123 \text{ кг/м}^3$.

$$2.221. \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{P_0}{P_0 - \alpha P (1 - \mu_n/\mu_v)} = 1,005.$$

2.222. $\alpha = \Delta F R T / (\mu_1 - \mu_2) g V P_0 = 0,2$, где $\mu_1 = 29$ г/моль и $\mu_2 = 18$ г/моль — молярные массы воздуха и воды.

2.223. Разница в показаниях весов определяется изменением разности выталкивающих сил, действующих на грузы со стороны воздуха.

Выталкивающая сила пропорциональна массе вытесненного газа: $F = V \rho g = V \mu P g / RT$. Изменение ее, следовательно, зависит от изменения средней молярной массы воздуха. Для сухого воздуха $\mu_1 = 29$ г/моль; для влажного воздуха $\mu_2 = \mu_v P_v / P + \mu_1 (P - P_v) / P$, где $\mu_v = 18$ г/моль — молярная масса воды.

В сухом воздухе гири уравновешивают деталь; значит,

$$(\rho_1 - \mu_1 P / RT) V_1 = (\rho_2 - \mu_1 P / RT) V_2,$$

где V_1 — объем детали, V_2 — объем гирь. Чтобы можно было заметить отклонение весов от равновесия во влажном воздухе при той же массе гирь, должно быть выполнено неравенство

$$(\rho_1 - \mu_2 P / RT) V_1 - (\rho_2 - \mu_2 P / RT) V_2 \geq m_0.$$

Из полученных уравнений имеем

$$(\rho_1 - \mu_2 P / RT) V_1 - (\rho_2 - \mu_2 P / RT) \frac{\rho_1 - \mu_1 P / RT}{\rho_2 - \mu_1 P / RT} V_1 \geq m_0.$$

Отсюда для массы детали получаем условие

$$M = \rho_1 V_1 \geq m_0 \rho_1 \frac{\rho_2 - \mu_1 P / RT}{(\mu_1 - \mu_B) (\rho_2 - \rho_1) P_B / RT} = \\ = m_0 \rho_1 \frac{\rho_2 RT - \mu_1 P}{(\mu_1 - \mu_B) (\rho_2 - \rho_1) P_B} \approx m_0 \frac{\rho_1 \rho_2 RT}{(\mu_1 - \mu_B) (\rho_2 - \rho_1) P_B} = 43,2 \text{ г.}$$

Второй член в числителе окончательного выражения можно выбросить сразу, так как ясно, что добавка плотности воздуха к плотности латуни пренебрежимо мала.

2.224. Из графика определяем, что в течение времени $\tau = 50$ мин происходило таяние льда, так как в это время температура не менялась. Когда лед растаял, температура стала подниматься. За 5 мин температура повысилась на 1°C ; значит, было получено (за счет теплообмена) количество тепла $Q_0 = 4,2 \cdot 10^4$ Дж. Очевидно, за время таяния льда было получено в 10 раз больше тепла, т. е. $Q = 4,2 \cdot 10^5$ Дж. Масса растаявшего льда (т. е. льда, имевшегося вначале) $m_\lambda = Q/\lambda = 1,235$ кг.

2.225. Давление насыщенного водяного пара при температуре $t = 100^\circ\text{C}$ равно $P_0 = 10^5$ Па. Следовательно, пар в сосуде — насыщенный и при уменьшении объема конденсируется в воду. При этом выделяется количество тепла $Q = qm$, где q — удельная теплота испарения воды. Масса сконденсировавшегося пара (пар, содержащийся в половине объема) $m = \mu PV / 2RT = 5,9$ г, так что $Q = 1,33 \cdot 10^4$ Дж. Работу, которую совершают внешние силы при опускании поршня, $P\Delta V$, отдельно учитывать не надо. Она включена в теплоту конденсации пара.

2.226. Давление водяного пара в сосуде практически равно $P_0 = 10^5$ Па. Такое давление пар имеет при температуре $t = 100^\circ\text{C}$. Так как поршень поднялся на высоту h , объем пара $V = hS$, а масса $m = \mu P_0 h S / RT = 5,9$ г. Тепло идет на нагревание всей воды до температуры $t = 100^\circ\text{C}$ и испарение массы воды m . (Работа по поднятию поршня включена в q .) Итак, $Q = Mc \Delta T + qm$. Время, необходимое для выделения такого количества тепла,

$$\tau = Q/N = (Mc \Delta T + qm)/N = 858 \text{ с} = 14 \text{ мин } 18 \text{ с.}$$

2.227. Температура пара в сосуде $t = 100^\circ\text{C}$. Введенная вода должна нагреться до $t = 100^\circ\text{C}$ за счет конденсации некоторой массы пара:

$$Mc (T - T_0) = qm, \text{ откуда } m = Mc (T - T_0) / q = 3,34 \text{ г.}$$

Объем этой массы пара $V = mRT / \mu P = 5,3$ дм³. Итак, $h = V/S = 53$ см.

2.228. $m = q\mu P_0 V / RTc \Delta T = 3,17$ кг, где $c = 4200$ Дж/(кг · К) — удельная теплоемкость воды, $\Delta T = 100$ К, так как вода не может нагреться до более высокой температуры, чем $t = 100^\circ\text{C}$.

2.229. Вода нагреется до температуры, при которой давление ее насыщенного пара будет равно атмосферному давлению (100°C), после чего часть воды, в соответствии с запасом тепла, испарится. Массу испарившейся воды m найдем из уравнения теплового баланса:

$$M_1 c_1 (T - T_1) + qm = M_2 c_2 (T_2 - T), \quad m = [M_2 c_2 (T_2 - T) - M_1 c_1 (T - T_1)] / q = 38 \text{ г.}$$

Эта масса пара займет объем $V = mRT / \mu P = 64$ дм³. Следовательно, поршень поднимется на высоту $h = V/S = 64$ см.

2.230. $\Delta m/m = c(t - t_0)/q = 0,015$, где $t_0 = 100^\circ\text{C}$ — температура кипения при нормальном атмосферном давлении.

2.231. В «спокойный» период вода находится при давлении $P_0 + \rho gh \approx 10^6$ Па. При таком давлении температура кипения воды, как видно из рис. 2.43, $t_1 = 180^\circ\text{C}$. При достижении этой температуры начинается извержение, водяной столб выбрасывается, давление падает до атмосферного. «Активный» период заканчивается, когда за счет расхода тепла на испарение температура воды падает до точки кипения при нормальном давлении, т. е. до $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Пренебрегая массой воды, выброшенной в начале извержения, и теплоподводом за время активности, запишем уравнение теплового баланса: $mc(t_1 - t_2) = q \Delta m$. Отсюда $\Delta m/m = c(t_1 - t_2)/q \approx 0,15$.

Элементы молекулярной и атомной физики

2.232. Каждый атом, находящийся в вершине куба, принадлежит одновременно восьми ячейкам. Таких атомов восемь. Прибавив атом, находящийся в центре куба, получаем $n = 2$ атома на элементарную ячейку. Молярный объем $V = A/\rho$, так как молярная масса (масса одного моля атомов) численно равна относительной атомной массе. Объем ячейки $V_0 = nV/N_A = 2A/\rho N_A = 2,35 \cdot 10^{-23}$ см³. Постоянная решетки $a = V_0^{1/3} = 2,87 \cdot 10^{-8}$ см (2,87 Å). Минимальным расстоянием между атомами является половина пространственной диагонали куба: $a\sqrt{3}/2 = 2,485$ Å.

2.233. На элементарную ячейку приходится четыре атома алюминия. Постоянная решетки $a = (4A/\rho N_A)^{1/3} = 4,05 \cdot 10^{-8}$ см (4,05 Å). Минимальное расстояние между атомами $a/\sqrt{2} = 2,864$ Å.

2.234. На единицу площади стенки за единицу времени попадает масса серебра $M_\tau = mN_\tau = \rho d_\tau$, откуда $d_\tau = mN_\tau/\rho$, где N_τ — число частиц, попадающих на единицу площади стенки за единицу времени. Давление на стенку $P = mvN_\tau$, а $v = \sqrt{2E/m}$. Итак, $mN_\tau = P\sqrt{m/2E} = P\sqrt{A/2EN_A}$. Для толщины слоя, нарастающего за единицу времени, имеем $d_\tau = (P/\rho)\sqrt{A/2EN_A} = 9 \cdot 10^{-8}$ см/с.

2.235. $N = PVN_A/RT = 1,78 \cdot 10^{14}$.

2.236. Моль газа занимает объем $V = RT/P$. На одну молекулу приходится объем $V_1 = RT/PN_A = kT/P$. Среднее расстояние между молекулами, таким образом, $l = (kT/P)^{1/3}$. При температуре $t = 100^\circ\text{C}$ давление насыщенного водяного пара $P = 10^5$ Па. Окончательно получаем $l = 3,7 \cdot 10^{-9}$ м.

2.237. $N = \frac{m}{\mu} N_A \frac{V_B}{V} = 10^{12}$.

2.238. Число радиоактивных частиц во всей атмосфере $N = MN_A/A = 2,5 \cdot 10^{24}$. Масса атмосферного воздуха $M_0 = P_0 4\pi R^2/g = 4,6 \cdot 10^{18}$ кг. Число молекул воздуха во всей атмосфере $N_0 = M_0 N_A/\mu = 9,6 \cdot 10^{43}$. При нормальных условиях число молекул в объеме $V = 1$ дм³ воздуха легче всего найти из условия, что 1 моль ($6,02 \cdot 10^{23}$ молекул) воздуха занимает объем $V_0 = 22,4$ дм³/моль: $n_0 = N_A/V_0 = 2,7 \cdot 10^{22}$ дм⁻³. Зная полное число молекул воздуха и радиоактивных частиц, найдем число частиц в объеме $V = 1$ дм³: $n = n_0 N/N_0 = 700$ дм⁻³.

Итак, одна атомная бомба дает 700 радиоактивных частиц на каждый человеческий вдох!

2.239. Согласно уравнению газового состояния количество кислорода $\nu = m/\mu = PV/RT$. Число молекул в одном моле равно постоянной Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Число электронов в атоме равно его порядковому номеру. Принимая во внимание что молекула кислорода состоит из двух атомов, найдем

$$N = 2 \frac{m}{\mu} N_A Z = 2 \frac{PV}{RT} N_A Z = 4,3 \cdot 10^{24}.$$

2.240. На долю водорода приходится 3/241 массы гидрида урана, т. е. $\Delta m = 8,3$ мг. Из уравнения газового состояния получим давление $P = 3,5 \cdot 10^4$ Па.

2.241. По своим химическим свойствам тритий — водород. При комнатной температуре это газ с формулой ${}^3\text{H}_2$ и молярной массой $\mu = 6$ г/моль. В начале срока хранения, таким образом, в сосуде было $\nu_b = 1/6$ моль водорода. Через 12 лет половина его превратилась в одноатомный гелий, и всего стало $\nu = 1/4$ моль. Давление найдем из уравнения газового состояния: $P = \nu RT/V = 6,2 \cdot 10^5$ Па.

2.242. Найдем число ядер гелия через год ($\tau = 3,15 \cdot 10^7$ с): $N = N_0 \tau = 1,17 \cdot 10^{18}$. Количество гелия $\nu = N/N_A = 1,95 \cdot 10^{-6}$ моль. Давление $P = \nu RT/V = 4,6 \cdot 10^2$ Па.

2.243. Напишем реакцию образования гелия: ${}^7\text{Li} + {}^1\text{p} = 2 {}^4\text{He}$. Таким образом, масса образовавшегося гелия $m_{\text{He}} = 8m_{\text{Li}}/7 = 1,14$ г. Объем гелия найдем из уравнения газового состояния: $V = mRT/\mu P = 7,7$ дм³.

2.244. Число распадов в единицу времени пропорционально числу имеющих в данный момент радиоактивных ядер. Число отсчетов через время τ составляет 0,87 от первоначального; значит, число нераспавшихся ядер также составляет 0,87 от начального их числа. Еще через время τ оно уменьшится до $(0,87)^2$ и т. д. Нас интересует, через какое время число нераспавшихся ядер уменьшится вдвое: $(0,87)^n = 0,5$; $\tau_{1/2} = n\tau$. Отсюда $\tau_{1/2} \approx 5\tau = 1$ ч 50 мин.

2.245. Тепловыделение пропорционально числу распадов в единицу времени, т. е. числу нераспавшихся ядер ${}^{24}\text{Na}$. В условиях задачи эта доля должна составлять 0,9 от начальной. По аналогии с задачей 2.244 имеем $(0,9)^n = 0,5$; $n\tau = \tau_{1/2}$, $n \approx 6,6$. Отсюда $\tau = \tau_{1/2}/n = 2$ ч 15 мин.

2.246. Время опыта составляет 1/3 периода полураспада. Оставшаяся масса составляет $m = m_0 2^{-1/3} \approx 0,8m_0$. Значит, распалось 0,2 от начальной массы, или 0,2 мг, кремния. Теперь нетрудно получить, что $\Delta T = 0,2m_0 N_A Q/AC = 0,017$ К.

2.247. Доля распавшихся ядер $\alpha = AC \Delta T/mN_A Q = 0,3$. Осталось $0,7 \approx 2^{-1/2}$ от начальной массы. Значит, период полураспада $\tau_{1/2} \approx 2\tau = 1$ ч 40 мин (см. решение задачи 2.246).

2.248. За некоторое время τ спутник столкнется с молекулами, находящимися в цилиндре сечения S и длины $v\tau$. Число молекул в этом объеме равно $Sv\tau n$. Число молекул в единице объема можно найти, используя уравнение газового состояния в форме $P = nkT$: $n = P/kT = N_A P/RT$. Для искомого числа столкновений в единицу времени имеем $z = SvN_A P/RT = 6 \cdot 10^{19}$ с⁻¹. Мы считали молекулы неподвижными. В данном случае это не вносит существен-

ной погрешности, так как средняя скорость молекул гораздо меньше скорости спутника.

2.249. Молекула столкнется с другой молекулой, если расстояние между центрами окажется меньше d . Пусть за какое-то время молекула прошла путь l . Тогда она столкнулась с молекулами, центры которых находятся в ломаном цилиндре (изломы в точках столкновений) длины l и сечения πd^2 . Число молекул в этом объеме $n\pi l d^2$ (n — число молекул в единице объема) и есть число столкновений.

Подсчитаем путь от столкновения до столкновения — длину свободного пробега:

$$\lambda = \frac{l}{n\pi l d^2} = \frac{1}{n\pi d^2} = \frac{RT_0}{N_A P_0 \pi d^2} = 8,75 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Здесь давление принято равным $P_0 = 10^5$ Па, температура $T_0 = 273$ К. Экспериментальное значение длины свободного пробега при таких условиях $\lambda = 6,20 \cdot 10^{-8}$ м. Расхождение в основном связано с тем, что мы считали все молекулы, кроме выбранной, неподвижными. Подробный анализ показывает, что учет относительного движения молекул приводит к изменению длины свободного пробега в $1/\sqrt{2}$ раз. Помножив полученный нами результат на этот множитель, окончательно имеем $\lambda = 6,19 \cdot 10^{-8}$ м.

2.250. Длина свободного пробега, пропорциональная давлению (см. решение задачи 2.249), в условиях нашей задачи будет равна примерно $\lambda = 1$ см. Это значит, что молекулы между внутренней и внешней стенками термоса практически не сталкиваются друг с другом. После столкновения с внутренней стенкой они обладают энергией, соответствующей температуре $T_1 = 353$ К (мы приняли среднее за интересующее нас время значение температуры). После столкновения с внешней стенкой энергия молекул соответствует температуре $T_2 = 293$ К (принимая комнатную температуру $t_2 = 20^\circ\text{C}$). Так как молекулы воздуха двухатомные, для них $C_V = 5R/2$, и переносимая одной молекулой энергия $\omega = \frac{5}{2} \frac{R}{N_A} (T_1 - T_2)$.

Число молекул, сталкивающихся со стенкой в единицу времени, равно для единицы поверхности

$$z = \frac{n\bar{v}_x}{2} \approx \frac{PN_A}{2RT} \sqrt{\frac{RT}{2\mu}},$$

где T — средняя температура газа; примем ее равной $T = 325$ К. Окончательно для потока тепла, уносимого от воды, имеем

$$q = z\omega S = \frac{5}{4} P \sqrt{\frac{R}{2\mu T}} (T_1 - T_2) S \approx 3 \text{ Дж/с.}$$

Искомое время $\tau = mc \Delta T / q \approx 2,8 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 8 \text{ ч}$. Масса воды принята равной $m = 1$ кг.

2.251. По условию задачи отверстия очень малы. Будем считать, что они малы по сравнению с длиной свободного пробега молекул гелия. Тогда все молекулы, попавшие на отверстие, переходят из одного сосуда в другой. Число молекул, сталкивающихся с единицей поверхности, пропорционально концентрации и средней скорости молекул: $z \sim n\bar{v} \sim P \sqrt{T}/T = P/\sqrt{T}$. Пере-

носимая молекулами энергия пропорциональна z и средней энергии молекул $w \sim zT \sim P \sqrt{T}$. Потоки молекул и потоки энергии из полости в стационарном состоянии уравниваются соответствующими потоками в полость из обоих сосудов:

$$\frac{2P_x}{\sqrt{T_x}} = \frac{P}{\sqrt{2T}} + \frac{P}{\sqrt{T}}, \quad 2P_x \sqrt{T_x} = P \sqrt{2T} + P \sqrt{T}.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$T_x = T \sqrt{2} \approx 1,4T, \quad P_x = P (\sqrt{2} + 1)/2 \sqrt{2} \approx P.$$

2.252. В тонких порах столкновений между молекулами нет, и вероятность проникновения через перегородку одинакова для всех молекул, попавших в поры из трубы. Число молекул, попадающих в поры, зависит от их концентрации и скорости (см. решение задачи 2.251). Скорость же, при одной и той же температуре, зависит только от массы молекулы. Поэтому можем записать (индекс 1 относится к ^{235}U , индекс 2 — к ^{238}U):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}},$$

где $n_1/n_2 = \alpha_0 = 0,007$, молярная масса гексафторида урана-235 $\mu_1 = 349$ г/моль, а молярная масса гексафторида урана-238 $\mu_2 = 352$ г/моль. Отношение z_1/z_2 равно отношению концентраций соответствующих гексафторидов в сосуде C .

Таким образом, увеличение отношения концентраций ^{235}U и ^{238}U (коэффициент обогащения) $\gamma = \sqrt{352/349} \approx 1,0043$. При прохождении n каскадов коэффициент обогащения $\gamma_n = \gamma^n$. Число каскадов n определится из соотношения

$$\alpha_n = \alpha_0 \gamma^n = \alpha_0 \gamma^n,$$

или

$$n = \frac{\ln(\alpha/\alpha_0)}{\ln \gamma} \approx \frac{\alpha/\alpha_0 - 1}{\gamma - 1}.$$

Приближенное равенство справедливо, когда α/α_0 близко к единице. Для интересующих нас случаев расчет дает $n_1 \approx 450$, $n_2 \approx 2200$.

2.253. Пусть n — концентрация нейтронов, ρ — плотность делящегося вещества, r — его характерный линейный размер (например, радиус уранового шарика). Число рождаемых отдельным нейтроном в единицу времени вторичных нейтронов пропорционально числу столкновений этого нейтрона с ядрами, т. е. концентрации ядер, или, в конечном итоге, плотности вещества ρ . Всего в объеме делящегося вещества имеется nV нейтронов.

Таким образом, число рождающихся в единицу времени во всем объеме вторичных нейтронов $N_+ = A_1 n \rho r^3$. Число покидающих активный объем нейтронов N_- зависит от их концентрации и площади поверхности образца: $N_- = A_2 n r^2$. В этих выражениях константы A_1 и A_2 не зависят от n , ρ , r . В критическом режиме $N_+ = N_-$, или $\rho r_{\text{кр}} = A$.

Итак, критический радиус обратно пропорционален плотности делящегося вещества. Критический объем, следовательно, обратно пропорционален ρ^3 , а критическая масса обратно пропорциональна ρ^2 . При уменьшении линейных размеров твердого тела в 10 раз плотность возрастает в 10^3 раз. При этом критический объем уменьшается в 10^9 раз, критическая масса — в 10^6 раз.

III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Электростатика *)

3.1. Заряд шара равен заряду электрона, умноженному на число атомов в шаре: $Q = ne$. Число атомов в шаре равно произведению количества вещества на постоянную Авогадро: $n = mN_A/A$. Масса меди $m = 4\pi R^3 \rho / 3$. Таким образом, $Q = eN_A \cdot 4\pi R^3 \rho / 3A = 5,6 \cdot 10^7$ Кл.

$$3.2. F = N^2 e^2 / 4\pi \epsilon_0 R^2 = 4\pi N_A^3 r^6 \rho^2 e^2 / 9 \epsilon_0 A^2 R^2 = 4,38 \cdot 10^{18} \text{ Н.}$$

3.3. Потенциал большой капли $V' = Q / 4\pi \epsilon_0 R$, где Q — заряд капли, R — ее радиус. Заряд большой капли равен сумме зарядов всех малых капелек: $Q = Nq = 4\pi \epsilon_0 N V r$, где r — радиус малых капелек. Найдем потенциал большой капли: $V' = NVr / R$. Так как объем ртути при слиянии малых капелек сохраняется, то $N \cdot 4\pi r^3 / 3 = 4\pi R^3 / 3$, откуда $r^3 / R^3 = 1 / N$. Окончательно получаем $V' = VN^{2/3}$.

3.4. После первого соприкосновения с пластинкой шар получит заряд q , на пластинке останется заряд $Q - q$, а их потенциалы будут равны. Когда после многих соприкосновений потенциал шара достигнет потенциала пластинки, заряженной зарядом Q , дальнейший перенос заряда станет невозможным. Из этих соображений получаем максимальный заряд шара: $q_{\max} = Qq / (Q - q)$.

3.5. При заземлении потенциал шара обращается в нуль. При заземлении первого шара второй создает на нем потенциал $V = q / 4\pi \epsilon_0 R$. На первом шаре должен возникнуть заряд, создающий такой же по модулю потенциал, но противоположного знака: $q_1 = -Vr \cdot 4\pi \epsilon_0 = -qr / R$. Этот заряд, в свою очередь, создает на втором шаре потенциал $V' = q_1 / 4\pi \epsilon_0 R = -qr / 4\pi \epsilon_0 R^2$. Для компенсации этого потенциала на втором шаре при его заземлении должен оказаться заряд $q_2 = -4\pi \epsilon_0 V' r = qr^2 / R^2$. Теперь подсчитаем потенциал первого шара в конце опыта:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R} = -\frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \approx -\frac{q}{4\pi \epsilon_0 R}.$$

$$3.6. q = V \cdot 4\pi \epsilon_0 r^3 / R (R + r) \approx 4\pi \epsilon_0 V r^3 / R^2.$$

3.7. Потенциал оболочки будет складываться из потенциала, обусловленного наведенным на ней зарядом Q_2 , и потенциала в поле шара: $Q_2 / 4\pi \epsilon_0 R_2 + Q_1 / 4\pi \epsilon_0 R_2 = 0$, откуда $Q_2 = -Q_1$. Потенциал шара будет складываться из потенциала V_1 , обусловленного его собственным зарядом Q_1 , и потенциала V_2 , обусловленного наведенным на оболочке зарядом $Q_2 = -Q_1$: $V = V_1 + V_2 = V_1 (R_2 - R_1) / R_2$.

3.8. После соединения шара с оболочкой весь заряд перераспределяется между ними таким образом, что потенциалы шара и оболочки будут равны. Потенциал оболочки $V_2 = Q / 4\pi \epsilon_0 R_2$, где $Q = 4\pi \epsilon_0 V_1 R_1$. Потенциал оболочки (и шара) равен окончательно $V_2 = V_1 R_1 / R_2$.

3.9. Заряд конденсатора q после раздвигания пластин не изменяется; следовательно, $q = V_1 C_1 = V_2 C_2$, где $C_1 = \epsilon_0 S / d_1$, $C_2 = \epsilon_0 S / d_2$. Отсюда получаем $V_2 = V_1 d_0 / d_1 = 100$ В.

*) Во всех задачах этого раздела диэлектрическая проницаемость воздуха полагается равной единице и в формульные выражения не входит.

З а м е ч а н и е. На первый взгляд может показаться, что, увеличивая расстояние d между пластинами заряженного плоского конденсатора, можно получить сколь угодно высокую разность потенциалов. Заметим, однако, что приведенные выше формулы для C_1 и C_2 справедливы только для плоских конденсаторов, у которых расстояние между пластинами значительно меньше линейных размеров пластин (в данном случае $d_2 \ll \sqrt{S} = 25$ см).

3.10. Емкость и заряд системы из трех конденсаторов равны

$$C = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad q = \mathcal{E}C = \frac{\mathcal{E}C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Этой же величине q равен заряд q_1 конденсатора C_1 и суммарный заряд $q_2 + q_3$ конденсаторов C_2 и C_3 . Разности потенциалов на конденсаторах C_2 и C_3 равны друг другу (параллельное соединение); следовательно, $V_2 = V_3 = q_2/C_2 = q_3/C_3$. Решая совместно полученную систему уравнений, определим q_2 и q_3 . Окончательно имеем

$$q_1 = \frac{\mathcal{E}C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad q_2 = \frac{\mathcal{E}C_1C_2}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad q_3 = \frac{\mathcal{E}C_1C_3}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

3.11. Емкости батареи конденсаторов при разомкнутом и замкнутом ключе K равны $C_1 = 2C/3 + CC_x/(C + C_x)$, $C_2 = 3C(C + C_x)/(3C + C + C_x)$.

Приравняв эти выражения, получим $C_x = C/2$.

3.12. $V_{ab} = \mathcal{E}C(C_1 - C_2)/(C_1 + C)(C_2 + C)$.

3.13. $V_{ab} = (\mathcal{E}_1C_1 + \mathcal{E}_2C_2)/(C_1 + C_2)$.

3.14. Пусть q_1 и q_2 — заряды на конденсаторах после раздвижения пластин одного из них, V — разность потенциалов на них. Тогда

$$q_1 + q_2 = q_0, \quad q_0 = 2C_0V_0, \quad V = q_1/C_0 = 3q_2/C_0.$$

Из этих соотношений найдем

$$q_1 = 3C_0V_0/2, \quad q_2 = C_0V_0/2, \quad V = 3V_0/2.$$

3.15. Согласно закону сохранения электрического заряда полный заряд Q системы из двух конденсаторов до и после соединения их в замкнутую цепь один и тот же: $q_1 - q_2 = q'_1 + q'_2 = Q$, где q'_1 и q'_2 — искомые заряды. Очевидно, что после соединения конденсаторов разности потенциалов на пластинах обоих конденсаторов будут равны между собой: $q'_1/C_1 = q'_2/C_2$. Окончательно получим

$$q'_1 = C_1(q_1 - q_2)/(C_1 + C_2), \quad q'_2 = C_2(q_1 - q_2)/(C_1 + C_2).$$

3.16. Заряд $q = \mathcal{E}C_1$, полученный от батареи э. д. с. \mathcal{E} конденсатором C_1 , после подключения конденсатора C_2 распределится между ними пропорционально емкостям (так как разность потенциалов на них будет одна и та же). Вычислим эти заряды: $q = q_1 + q_2 = \mathcal{E}C_1$, $q_1 = \mathcal{E}C_1^2/(C_1 + C_2)$, $q_2 = \mathcal{E}C_1C_2/(C_1 + C_2)$.

После переключения конденсаторов C_1 и C_2 заряды частично скомпенсируются и суммарный заряд $Q = q_1 - q_2 = \mathcal{E}C(C_1 - C_2)/(C_1 + C_2)$. Разность потенциалов на конденсаторах $V = Q/(C_1 + C_2) = \mathcal{E}C(C_1 - C_2)/(C_1 + C_2)^2$.

3.17. После подключения конденсатора C_1 к конденсатору C_2 заряд $q = \mathcal{E}C_1$ распределится между ними пропорционально емкостям (так как разность потенциалов на них будет одна и та же):

$$q = q_1 + q_2 = \mathcal{E}C_1, \quad q_1/C_1 = q_2/C_2, \quad q_2 = \mathcal{E}C_1C_2/(C_1 + C_2).$$

3.18. Начальный заряд конденсатора $q_0 = C_0 V_0$. После подключения C заряд q_0 распределится между C_0 и C . После отсоединения C от C_0 на обоих конденсаторах будет разность потенциалов $V_1 = q_0 / (C_0 + C) = C_0 V_0 / (C_0 + C)$. Оставшийся на C_0 заряд $q_1 = C_0 V_1 = C_0^2 V_0 / (C_0 + C)$. Повторяя эту операцию, мы будем иметь набор конденсаторов, заряженных до напряжений V_1, V_2, V_3, \dots где V_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) легко определить, пользуясь методом математической индукции: $V_n = C_0 V_0 \left(\frac{C_0}{C_0 + C} \right)^n$. Общее напряжение

$$V = V_1 + V_2 + \dots = \frac{C_0 V_0}{C_0 + C} \left(1 + \frac{C_0}{C_0 + C} + \frac{C_0^2}{(C_0 + C)^2} + \dots \right).$$

Просуммировав получившуюся геометрическую прогрессию, определим максимальную разность потенциалов: $V = C_0 V_0 / C = 8000$ В.

3.19. До замыкания ключа K (рис. 3.7) суммарный заряд правых пластин конденсаторов был равен нулю. После замыкания ключа нижний конденсатор разряжен, а на верхнем заряд равен $\mathcal{E}C$, причем на правой пластине он положителен. Этот заряд и должен протечь через гальванометр на правые пластины конденсаторов.

3.20. До замыкания ключа K конденсаторы C_1 и C_2 были соединены последовательно и подключены к батарее. Их заряды были равны. На правой пластине конденсатора C_1 и на верхней пластине конденсатора C_2 заряды имели разные знаки; суммарный заряд этих пластин был равен нулю. После замыкания ключа разность потенциалов между пластинами конденсатора C_1 и заряды на них стали равны нулю, а пластины конденсатора C_2 приобрели заряды $\pm \mathcal{E}C_2$ (на верхней пластине заряд $+\mathcal{E}C_2$). Таким образом, суммарный заряд правой пластины конденсатора C_1 и верхней пластины конденсатора C_2 теперь стал $\mathcal{E}C_2$. Этот заряд и протек через гальванометр при замыкании ключа K .

3.21. Суммарные заряды левой и правой пар конденсаторов должны быть равны между собой, так как эти пары соединены последовательно. Тогда разности потенциалов на них обратно пропорциональны емкостям:

$$V_1 = \frac{\mathcal{E}(C_2 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}, \quad V_2 = \frac{\mathcal{E}(C_1 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

Заряды конденсаторов C_3 и C_4 равны

$$q_3 = \frac{\mathcal{E}C_3(C_2 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}, \quad q_4 = \frac{\mathcal{E}C_4(C_1 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

Так как до замыкания ключа все конденсаторы были не заряжены, то искомый заряд, протекший через гальванометр,

$$q = q_4 - q_3 = \frac{\mathcal{E}(C_1 C_4 - C_2 C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

3.22. Добавим на каждую пластину заряд $q' = -5q/2$ (полусумма зарядов пластин, взятая с обратным знаком). Тогда конденсатор окажется «нормально» заряженным с зарядами пластин $\pm 3q/2$. Разность потенциалов между пластинами будет равна $3q/2C$. Но поля одинаковых зарядов пластин внутри конденсатора компенсируют друг друга. Следовательно, добавленные нами заряды не изменили поле между пластинами, а значит, и разность потенциалов на конденсаторе. Итак, искомая разность потенциалов равна $3q/2C$.

3.23. В силу принципа суперпозиции поле внутри малого конденсатора (рис. 3.10, а) удвоится, а в оставшейся части большого конденсатора не изме-

нится. Разность потенциалов между пластинами первого конденсатора возрастает в полтора раза. Во втором случае (рис. 3.10, б) разность потенциалов уменьшится вдвое.

3.24. Поскольку обкладки конденсаторов не заряжены, они не создают электрического поля. Следовательно, поле создается только пластиной, имеющей заряд Q (рис. 3.104). Это поле симметрично относительно пластины; его напряженность $E = Q/2\epsilon_0\epsilon S$. Таким образом, разность потенциалов между обкладками конденсатора

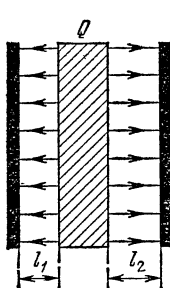


Рис. 3.104.

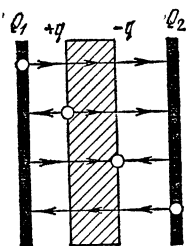


Рис. 3.105.

$\Delta V = V_2 - V_1 = E(l_2 - l_1) =$
 $= Q(l_2 - l_1)/2\epsilon_0\epsilon S.$

3.25. Так как полный заряд пластины равен нулю, то заряд q , индуцированный на левой поверхности пластины, равен по модулю и противоположен по знаку заряду, индуцированному на правой поверхности. Поле в любой точке пространства создаваемых четырьмя заряженными

плоскостями $(+Q_1, +q, -q, +Q_2)$. Полная напряженность поля внутри металлической пластины на основании принципа суперпозиции может быть записана в виде

$$E = (Q_1 + q + q - Q_2)/2\epsilon_0\epsilon S,$$

где S — площадь пластин и обкладок конденсатора. Но напряженность электростатического поля внутри металла $E = 0$. Отсюда следует, что $q = (Q_2 - Q_1)/2$.

3.26. Образовавшийся сложный конденсатор можно рассматривать как батарею из трех конденсаторов одинаковой емкости $C_0 = \epsilon_0 S/d$: конденсатор I (пластины 2 и 3), конденсатор II (пластины 1 и 2) и конденсатор III (пластины 3 и 4). Конденсаторы I и II соединены параллельно: пластины 1 и 3 имеют равные потенциалы (так как они соединены проводником), а пластина 2 у них общая; конденсатор III присоединен к этой паре последовательно. По эквивалентной схеме соединения (рис. 3.106)

находим емкость сложного конденсатора:

$$C = (1/2C_0 + 1/C_0)^{-1} = 2C_0/3 = 2\epsilon_0 S/3d.$$

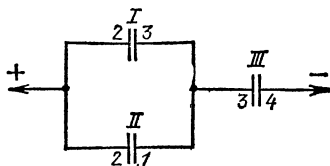


Рис. 3.106.

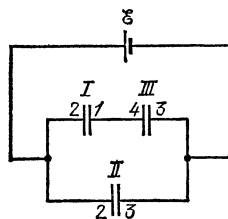


Рис. 3.107.

3.27. При включении по эквивалентной схеме, изображенной на рис. 3.107, конденсаторы I (пластины 1—2) и III (пластины 3—4) соединены последовательно, так как равны потенциалы пластин 1 и 4, а конденсатор II (пластины 2—3) включен параллельно этой паре. Заряд на конденсаторе II $q_{II} = \mathcal{E}C_0 = \epsilon_0\mathcal{E}S/d$, а заряды на конденсаторах I и III $q_I = q_{III} = \mathcal{E}C_0/2 = \epsilon_0\mathcal{E}S/2d$. На пластине 2 находятся положительные заряды конденсаторов I и II; следо-

вательно, общий ее заряд $q_2 = q_1 + q_{11} = 3\varepsilon_0 \mathcal{E} S / 2d$. Заряд пластины 3, очевидно, отрицателен: $q_3 = -q_2$. Отметим, что пластины 1 и 4 оказываются заряженными. Причиной перетекания зарядов является рассеянное поле конденсатора II, образованного пластинами 2 и 3.

3.28. Пластина 1 в новом положении разделила конденсатор на два — с емкостями $2C$ каждый (рис. 3.15). При этом она служит отрицательной обкладкой для правого конденсатора (его заряд равен q_2) и положительной — для левого (его заряд равен q_3). Суммарный заряд пластины равен $\mathcal{E}C$; следовательно, $q_3 - q_2 = \mathcal{E}C$. Суммарная разность потенциалов на образовавшихся конденсаторах равна э. д. с. батареи:

$$q_3/2C + q_2/2C = \mathcal{E}, \quad \text{откуда} \quad q_2 = \mathcal{E}C/2, \quad q_3 = 3\mathcal{E}C/2.$$

Учитывая полярность, определим, что заряд обкладки 2 равен $+\mathcal{E}C/2$, а заряд обкладки 3 равен $-\mathcal{E}C/2$.

Отметим, что, хотя положительная обкладка одного из образовавшихся конденсаторов соединена с отрицательной обкладкой другого, их нельзя считать последовательно соединенными в обычном понимании, т. е. нельзя рассчитывать заряд как произведение разности потенциалов между пластинами конденсатора на емкость $C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$, считать, что потенциалы распределены обратно пропорционально емкостям, и т. д. Все эти соотношения имеют место только в случае равенства зарядов обоих конденсаторов. А именно это условие в данном случае не выполнено.

3.29. Расчет показывает, что поле в правом зазоре (рис. 3.16) равно нулю, а разность потенциалов в левом зазоре равна э. д. с. батареи. Следовательно, после замыкания заряд через гальванометр не потечет.

3.30. Поверхность диэлектрика (рис. 3.108) будет являться эквипотенциальной поверхностью, поскольку напряженность электрического поля перпендикулярна к ней. Можно представить себе, что плоскость диэлектрика покрыта тонким слоем металла. Этот слой не нарушит эквипотенциальности плоскости и не изменит ее потенциала. Таким образом, разность потенциалов между обкладками конденсатора, а следовательно, и емкость останутся такими же, как и до металлизации поверхности диэлектрика. Это означает, что конденсатор емкости C можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора с емкостями C_1 и C_2 , т. е. $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$. Вычислим C_1 и C_2 : $C_1 = \varepsilon_0 S / d_1$, $C_2 = \varepsilon_0 S / d_2$. Результирующая емкость $C = \varepsilon_0 S / (d_1 + \varepsilon d_2) = 7,3 \cdot 10^{-9}$ Ф.

3.31. Пусть S и d — площадь пластин конденсатора и расстояние между ними. Тогда в первом случае мы имеем (см. решение задачи 3.30) последовательно соединенные конденсаторы с параметрами S и $d/2$, а во втором — параллельно соединенные: один — с параметрами kS и d , другой — с параметрами $(1-k)S$ и d . В обоих случаях один из конденсаторов заполнен диэлектриком. Емкости первой и второй емкостей

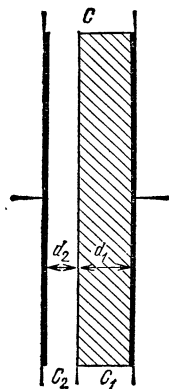


Рис. 3.108.

$$C_1 = \left(\frac{d}{2\varepsilon_0 S} + \frac{d}{2\varepsilon_0 S} \right)^{-1} = \frac{2\varepsilon_0 \mathcal{E} S}{d(1+\varepsilon)}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon k S}{d} + \frac{\varepsilon_0 (1-k) S}{d} = \frac{\varepsilon_0 (1-k + k\varepsilon) S}{d}.$$

Из равенства $C_1 = C_2$ получаем $k = 1/(1+\varepsilon)$.

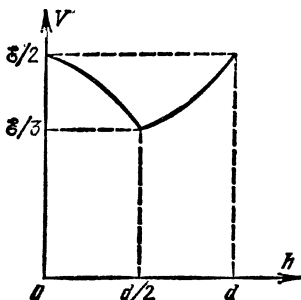
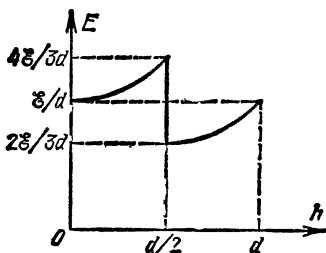


Рис. 3.109.

$$3.32. C = \epsilon C_0 / (\epsilon - 1).$$

3.33. Напряженность поля E и потенциал V меняются в зависимости от толщины слоя керосина h следующим образом:

$$E = 2\mathcal{E} / (2d - h), \quad h < d/2;$$

$$E = \mathcal{E} / (2d - h), \quad h > d/2,$$

$$V = \mathcal{E} (d - h) / (2d - h), \quad h < d/2;$$

$$V = \mathcal{E} d / (2d - h), \quad h > d/2.$$

Графики приведены на рис. 3.109.

3.34. Если сферический конденсатор имеет заряд q , то потенциал внутренней обкладки (см. решение задач 3.7 и 3.8) $V = 4\pi\epsilon_0 Q (R - r) / Rr$. Потенциал внешней обкладки равен нулю. Следовательно, для емкости сферического конденсатора получаем $C = 4\pi\epsilon_0 Rr / (R - r)$. Напряженность поля максимальна вблизи поверхности внутренней обкладки конденсатора:

$$E_0 = Q / 4\pi\epsilon_0 r^2 = V_0 R / (R - r) r = 20 \text{ кВ/см.}$$

3.35. Используя решение задачи 3.34, запишем выражение для разности потенциалов V на сферическом конденсаторе в зависимости от напряженности поля E вблизи поверхности внутренней обкладки: $V = Er(R - r) / R$. Это выражение имеет максимум при $r = R/2$. Отсюда получаем $V_0 = E_0 R / 4 = 30 \text{ кВ}$.

3.36. $q_{\text{max}} = 4\pi\epsilon_0 r^2 E_0 = 2.7 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$. Пробой начнется в диэлектрике.

3.37. У поверхности Земли поле создается зарядом Земли; его напряженность $E_0 = q / 4\pi\epsilon_0 R^2$, где R — радиус Земли. На высоте h поле создается зарядом Земли и зарядом слоя атмосферы толщины h , так что

$$\frac{E_0}{2} = \frac{q + 4\pi R^2 h \rho}{4\pi\epsilon_0 (R + h)^2} \approx \frac{q + 4\pi R^2 h \rho}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Мы учли, что $h \ll R$. Решая полученную систему уравнений, находим $\rho = -\epsilon_0 E_0 / 2h = -4.4 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^3$.

3.38. Вычислим силу притяжения F между пластинами конденсатора. В плоском конденсаторе одна из пластин находится в однородном поле, создаваемом другой пластиной. Напряженность этого поля равна половине полной напряженности поля внутри конденсатора: $E_1 = q / 2\epsilon_0 S$. Сила, действующая на пластину, $F = qE_1 = q^2 / 2\epsilon_0 S$. Учитывая, что заряд $q = VC = V\epsilon_0 S / d$, получаем $F = \epsilon_0 S V^2 / 2d^2 = 2.2 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$. Очевидно, что для сохранения равновесия нужно добавить на вторую чашку весов перегрузок массы $m = F / g = 2.25 \text{ г}$.

3.39. Сила, действующая на пружину, изменялась на величину $Q^2 / 2\epsilon_0 S$ (см. решение задачи 3.38). По определению $k = \Delta F / \Delta l$, откуда удлинение пружины $\Delta l = Q^2 / 2\epsilon_0 k S$.

3.40. Возрастает в $4\epsilon^2 / (\epsilon + 1)^2 \approx 2.25$ раза

3.41. Энергия конденсатора емкости C с зарядом q равна $U_1 = q^2 / 2C$. При сливе керосина заряд не изменился, а емкость вдвое уменьшилась. Энергия возросла вдвое. Эта энергия $\mathcal{U} = 2U_1$ и выделится при разряде конденсатора.

3.42. Энергия системы складывается из энергий двух конденсаторов. Вначале энергия $U_1 = C_1 V_1^2/2 + C_2 V_2^2/2$. После соединения конденсаторов на них установится общая разность потенциалов (см. решения задач 3.15 и 3.16) $V = (C_1 V_1 \pm C_2 V_2)/(C_1 + C_2)$. Верхний знак относится к случаю а), нижний — к случаю б). Энергия в новом состоянии

$$U_2 = (C_1 + C_2) V^2/2 = (C_1 V_1 \pm C_2 V_2)^2/2 (C_1 + C_2).$$

Разность начальной и конечной энергий выделится при разрядке конденсаторов:

$$\Delta U = U_1 - U_2 = C_1 C_2 (V_1 \mp V_2)^2/2 (C_1 + C_2).$$

Закон Ома. Законы электролиза

3.43. Вычисляя сопротивления обеих цепей и приравняв их, получим $r = 2R$ и полное сопротивление каждой цепи $R_{AB} = 2R$. Решение можно существенно упростить, если подметить закономерность образования второй цепи: параллельно сопротивлению R_{AB} первой цепи подключен резистор с сопротивлением $2R$, а затем последовательно — резистор с сопротивлением R . При этом вновь получено первоначальное сопротивление. Но точно таким же образом получена и первая цепь, если за исходное принять сопротивление r . Очевидно, сопротивления первой и второй цепей одинаковы только в том случае, когда они равны r .

3.44. Решение сводится к сравнению напряжений на резисторе R в двух цепях (рис. 3.110). Получаем, что для удвоения напряжения на резисторе R надо выбрать сопротивление части потенциометра, к которой подключена нагрузка, $R_x = R(\sqrt{65} - 1)/8 \approx 7R/8$.

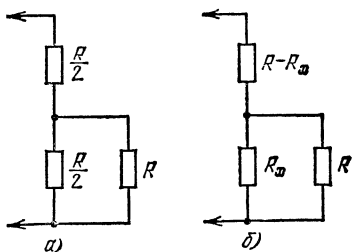


Рис. 3.110.

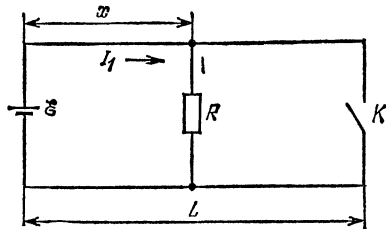


Рис. 3.111.

3.45. Нарушение изоляции в каком-либо месте линии эквивалентно включению в этом месте некоторого резистора с сопротивлением R (рис. 3.111). Если конец линии разомкнут, то согласно закону Ома $\mathcal{E} = (2x\rho + R) I_1$, где ρ — сопротивление единицы длины провода, x — расстояние до поврежденного участка, I_1 — ток в цепи источника. При замыкании конца линии параллельно резистору R подключается еще короткозамкнутый участок линии, так что

$$\mathcal{E} = \left[2x\rho + \frac{R \cdot 2(L-x)\rho}{R + 2(L-x)\rho} \right] I_2,$$

где I_2 — ток в цепи источника при замкнутом конце линии. Подставив во второе уравнение $x = \mathcal{E}/2\rho I_1 - R/2\rho$ из первого уравнения, получим квадратное уравнение для R :

$$I_2 R^2 - 2\mathcal{E} \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) R + \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \left(\frac{\mathcal{E}^2}{I_1} - 2L\rho\mathcal{E} \right) = 0.$$

откуда

$$R_{1,2} = \frac{1}{2I_2} \left\{ 2\mathcal{E} \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \pm \left[4\mathcal{E}^2 \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right)^2 - 4I_2 \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \left(\frac{\mathcal{E}^2}{I_1} - 2L\rho\mathcal{E} \right) \right]^{1/2} \right\}.$$

Используя числовые данные задачи и учитывая, что $\rho = 1,25$ Ом/км, имеем

$$R_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{146}}{3,6} \text{ Ом, откуда } R_1 \approx 10 \text{ Ом, } R_2 \approx 3,3 \text{ Ом.}$$

Вычислим соответствующие значения x : $x_1 = 2$ км, $x_2 = 4,7$ км. Очевидно, что значение x_2 не соответствует условию задачи; следовательно, окончательно имеем $R = 10$ Ом, $x = 2$ км.

$$3.46. R = 8(R_0 + 2L\rho)/225.$$

3.47. Стрелка отклонится на $n = I/i_0$ делений, где I — ток в цепи термопары, а i_0 — чувствительность гальванометра. Согласно закону Ома $I = \mathcal{E}/R = \mathcal{E}_0 t/R$, где t — температура нагретого спая, а полное сопротивление цепи

$$R = r + \frac{l}{S} S_1 + \frac{l}{S} \rho_2 = r + \frac{l}{\pi a^2} (\rho_1 + \rho_2).$$

Следовательно,

$$n = \frac{\mathcal{E}_0 t}{i_0} \left[r + \frac{l}{\pi a^2} (\rho_1 + \rho_2) \right]^{-1} = 3 \text{ деления.}$$

3.48. Через вольтметр V_1 течет ток I_1 , через вольтметр V_2 течет ток $I_1 - I_2$. Так как вольтметры одинаковы, их показания пропорциональны протекающим через них токам: $V_1/V_2 = I_1/(I_1 - I_2)$; отсюда $V_2 = (I_1 - I_2) V_1/I_1 = 0,1$ В.

3.49. Обозначим сопротивления вольтметров через r , резисторов — через R . Ток через третий резистор (рис. 3.21) равен току через третий вольтметр: $I_3 = V_3/r$. Напряжение на этом резисторе равно $V_3 R/r$. Сумма напряжений на вольтметре V_3 и третьем резисторе равна искомому напряжению на втором вольтметре: $V_2 = V_3(1 + R/r)$. Ток через второй резистор равен сумме токов I_3 и $I_2 = V_2/r$; напряжение на нем равно $(V_3 + V_2) R/r$. Сумма напряжений на втором резисторе и на втором вольтметре равна напряжению на первом вольтметре: $V_1 = V_2 + (V_3 + V_2) R/r$. Исключая из этих уравнений величину R/r , получим $V_2^2 + V_3 V_2 - V_3(V_1 + V_3) = 0$. Отсюда

$$V_2 = [V_3^2/4 + V_3(V_1 + V_3)]^{1/2} - V_3/2 \approx 8,65 \text{ В.}$$

3.50. При включении первого гальванометра в цепи термопары протекает ток $I_1 = \mathcal{E}/(r_1 + R)$. Аналогично, при включении второго гальванометра в цепи термопары протекает ток $I_2 = \mathcal{E}/(r_2 + R)$. Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{I_1 I_2 (r_2 - r_1)}{I_1 + I_2} = 1,03 \cdot 10^{-2} \text{ В, } R = \frac{\mathcal{E} - I_1 r_1}{I_1} = 11,25 \text{ Ом.}$$

3.51. Условие равенства напряжений на сопротивлении шунта $r_{ш}$ и гальванометре (рис. 3.112): $ir = (I - i)r_{ш}$, где I — ток во внешней цепи, i — ток через гальванометр. Следовательно, $r_{ш} = ir/(I - i) = r/(n - 1)$, где n — число, показывающее, во сколько раз понизилась чувствительность гальванометра. Согласно условию $r_{ш} r/(r_{ш} + r) + R_0 = r$, откуда $R_0 = r^2/(r_{ш} + r) = r(n - 1)/n = 260$ Ом.

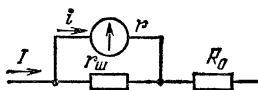


Рис. 3.112.

3.52. Очевидно, что вся шкала прибора соответствует току через прибор $I = i_0 n = 10^{-3}$ А, где i_0 — цена деления, n — число делений шкалы.

Чтобы сделать из этого прибора вольтметр, необходимо включить последовательно с ним добавочное сопротивление R_0 (рис. 3.113), которое находится из уравнения $V_0 = Ir + IR_0$, откуда $R_0 = (V_0 - Ir)/I \approx 2 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 200 \text{ кОм}$.

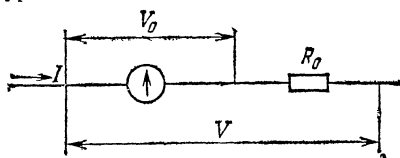


Рис. 3.113.

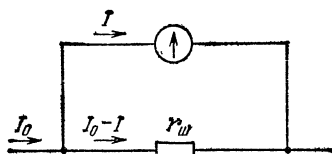


Рис. 3.114.

Чтобы сделать из прибора миллиамперметр, необходимо шунтировать прибор (рис. 3.114). Имеем $Ir = (I_0 - I)r_{ш}$, откуда $r_{ш} = Ir/(I_0 - I) \approx 0,0625 \text{ Ом}$.

3.53. Ток через гальванометр в обоих случаях одинаков. Общий ток разделяется между шунтом и цепью гальванометра обратно пропорционально сопротивлениям. Учитывая эти условия, запишем

$$I_1 r_{ш} / (r + r_1) = I_2 r_{ш} / (r + r_1 + r_2),$$

где r — сопротивление гальванометра, $r_{ш}$ — сопротивление шунта. Отсюда получаем $r = I_1 r_2 / (I_2 - I_1) - r_1 = 8 \text{ Ом}$.

3.54. Пусть r — сопротивление вольтметра, V — максимальное напряжение на вольтметре, I — ток, текущий через вольтметр при этом напряжении. При использовании добавочных сопротивлений максимальный ток должен быть прежним. Для трех случаев имеем

$$I(R_1 + r) = nV, \quad I(R_2 + r) = mV, \quad I \left(\frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1} + r \right) = kV,$$

где R_1 и R_2 — добавочные сопротивления, k — искомая величина. Учитывая, что $Ir = V$, эти уравнения можно преобразовать к виду

$$R_1 + r = nr, \quad R_2 + r = mr, \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r = kr.$$

Из этих уравнений получаем $k = (mn - 1)/(m + n - 2)$.

3.55. Сопротивление шунта, при котором стрелка отклонится на всю шкалу при токе во внешней цепи $I = 7,5 \text{ А}$, определится из соотношения $i_0 r = (I - i_0)r_{ш}$, где i_0 — ток через прибор, при котором стрелка прибора отклоняется на всю шкалу, r — сопротивление прибора (рис. 3.115). Необходимо теперь определить

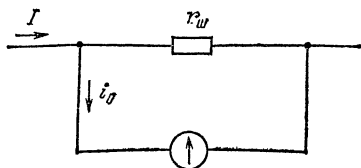


Рис. 3.115.

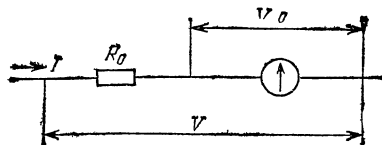


Рис. 3.116.

i_0 и r . Нам задано, что при включении шунта с сопротивлением $r'_{ш} = 100 \text{ Ом}$ стрелка прибора отклоняется на всю шкалу при токе во внешней цепи $I' = 3 \text{ А}$. Следовательно, $i_0 r = (I' - i_0)r'_{ш}$. Далее, при включении добавочного сопротивления $R_0 = 300 \text{ Ом}$ (рис. 3.116) стрелка отклоняется на всю шкалу, когда

напряжение $V = 4V_0 = 4i_0r$, или $i_0r + i_0R = 4i_0r$, откуда $r = R_0/3 = 100$ Ом. Окончательно находим

$$i_0 = I'r'_{\text{ш}}/(r + r'_{\text{ш}}) = 1,5 \text{ А}, \quad r_{\text{ш}} = 25 \text{ Ом}.$$

3.56. Пусть токи через сопротивления 1, 2, 3, 4 равны I_1, I_2, I_3, I_4 , ток через перемычку равен I и ток через батарею равен I_0 (рис. 3.117). Пренебрегая внутренним сопротивлением батареи, определим ток в цепи источника: $I_0 = \mathcal{E}/R$, где R — сопротивление между точками c и d . Очевидно, что $R = r/2 + 2r/3 = 7r/6$. В точке a имеем $I_1 = I_3 + I$. Равенство напряжений на сопротивлениях 1 и 2 дает $rI_1 = rI_2$; в точке c имеем $I_0 = I_1 + I_2$, откуда $I_1 = I_2 = I_0/2$. Равенство напряжений на сопротивлениях 3 и 4 дает $rI_3 = 2rI_4$; в точке d имеем $I_3 + I_4 = I_0$, откуда $I_4 = I_0/3$, $I_3 = 2I_0/3$. Из последних трех уравнений получим

Рис. 3.117.

$$I = I_1 - I_3 = I_0/6, \quad \text{или} \quad I = \mathcal{E}/7r.$$

3.57. Запишем закон Ома для соединенного с конденсаторами и замкнутого накоротко сопротивления R : $\mathcal{E} = (R + r)I$, $\mathcal{E} = r \cdot 3I$, где r — внутреннее сопротивление батареи. Теперь легко определить напряжение на сопротивлении R , равное сумме напряжений на конденсаторах: $V = IR = \mathcal{E} - Ir = \mathcal{E} - \mathcal{E}/3 = 2\mathcal{E}/3$. Учитывая равенство зарядов конденсаторов, получаем напряжения на них:

$$V_1 = 2\mathcal{E}C_2/3(C_1 + C_2), \quad V_2 = 2\mathcal{E}C_1/3(C_1 + C_2).$$

3.58. Обозначим заряды конденсаторов C , $2C$ и $3C$ через q_1 , q_2 и q_3 соответственно. Предположим, что у конденсатора C положительный заряд находится на правой пластине. Тогда из закона сохранения заряда имеем $q_3 = q_2 + q_1$. Разность потенциалов на конденсаторах $2C$ и C равна падению напряжения на сопротивлении R : $q_2/2C - q_1/C = \mathcal{E}/3$. Аналогично падение напряжения на сопротивлениях R и $2R$ (равное э. д. с. \mathcal{E}) равно разности потенциалов на конденсаторах $2C$ и $3C$: $q_2/2C + q_3/3C = \mathcal{E}$. Решая полученную систему уравнений, находим $q_1 = 2\mathcal{E}C/9$.

Примечание. Следует обратить внимание на то, что $q_1 > 0$. Это означает, что предположение о знаке заряда на обкладках конденсаторов C и $2C$ было правильным (от этого предположения зависит расстановка знаков в первом соотношении). Понятно, что, если бы было сделано другое предположение, ответ имел бы другой знак.

3.59. До замыкания ключа K суммарный заряд нижней пластины конденсатора C и левой пластины конденсатора $2C$ равнялся нулю. После замыкания ключа возникает цепь, к которой применимы соображения, аналогичные приведенным в задаче 3.58. Предположим, что заряжены положительно нижняя пластина конденсатора C и левая пластина конденсатора $2C$. Принимая во внимание, что разность потенциалов на конденсаторе C равна (при замкнутом ключе K) падению напряжения на сопротивлениях $2R$ и $3R$, а разность потенциалов на конденсаторе $2C$ равна падению напряжения на сопротивлении $3R$, получим

$$q_1/C = 5\mathcal{E}/6, \quad q_2/2C = \mathcal{E}/2, \quad q = q_1 + q_2,$$

где q_1 и q_2 — заряды конденсаторов C и $2C$, а q — искомый заряд, протекший через ключ и равный сумме зарядов положительных пластин этих двух конденсаторов. Отсюда $q = 11C\mathcal{E}/6$.

3.60. При решении этой и ряда последующих задач удобно реальную батарею, обладающую конечным внутренним сопротивлением, представить на эквивалентной схеме в виде идеальной батареи, соединенной последовательно с резистором, сопротивление которого равно внутреннему сопротивлению реальной батареи (рис. 3.118). В схемах, содержащих несколько источников, бывает трудно предугадать направления токов, текущих в различных частях цепи. Поэтому вначале направления токов выбираются произвольно. В нашем случае во всей цепи протекает один и тот же ток I . Будем считать положительным направление обхода контура по часовой стрелке и выберем направление тока I , как показано на рис. 3.118. Тогда разность потенциалов между точками a и b

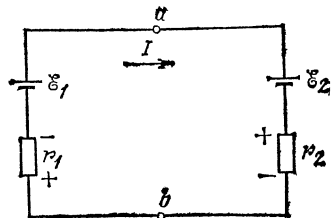


Рис. 3.118.

$$\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_1 - Ir_1 = \mathcal{E}_2 + Ir_2.$$

Это соотношение часто будет использоваться при решении последующих задач. Вычислим ток в цепи (рис. 3.118): $I = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)/(r_1 + r_2)$. Следовательно,

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 / r_1 - \mathcal{E}_2}{1 + r_2 / r_1} = 47 \text{ В.}$$

Этот результат получается при использовании любого из двух выражений: $\mathcal{E}_1 - Ir_1$ или $\mathcal{E}_2 + Ir_2$.

Заметим, что при $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ ток I получается положительным. Это означает, что мы угадали направление тока. Если выбрать направление обхода контура против часовой стрелки, то значение тока I получится отрицательным, но и предполагаемые напряжения на внутренних сопротивлениях батарей изменят знаки. Соответственно выражения для $\varphi_a - \varphi_b$ примут вид

$$\begin{aligned} \varphi_a - \varphi_b &= \mathcal{E}_1 + Ir_1 = \mathcal{E}_1 - |I| r_1, \\ \varphi_a - \varphi_b &= \mathcal{E}_2 - Ir_2 = \mathcal{E}_2 + |I| r_2. \end{aligned}$$

Истинное направление тока в цепи, как и истинное значение $\varphi_a - \varphi_b$, не зависит, конечно, от выбора направления обхода контура, от которого зависит расстановка знаков в уравнениях.

3.61. Ток через гальванометр не пойдет, если напряжение на нем, равное разностям потенциалов на батареях, будет равно нулю (см. решение задачи 3.60): $V = \mathcal{E}_1 - Ir_1 = \mathcal{E}_2 - Ir_2 = 0$. В результате получаем, что $r_1/r_2 = \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$.

3.62. Учитывая, что ток I через гальванометр равен нулю, напишем выражение для тока в цепи батарей:

$$I = 2\mathcal{E}/(R_1 + R_2 + R_3 + R_4).$$

Напряжение V на гальванометре также равно нулю:

$$V = \mathcal{E} - I(R_2 + R_4) = 0.$$

Решая полученные уравнения, имеем $R_4 = R_3 - R_2 + R_1$. Поскольку $R_2 > R_1$, а R_4 не может быть отрицательной величиной, задача имеет решение при условии, что $R_3 \geq R_2 - R_1$.

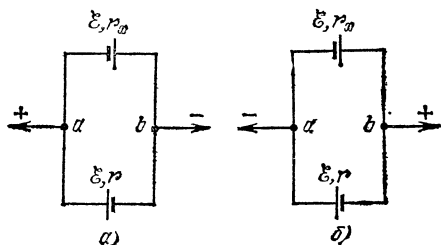


Рис. 3.119.

ностью батареи, имеющей сопротивление r (рис. 3.119, а), или с полярностью батареи, сопротивление которой r_x мы определяем (рис. 3.119, б). В соответствии с этим получим два возможных значения сопротивления r_x : а) $r_x = 3r$, б) $r_x = r/3$.

3.64. См. рис. 3.120. а) $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}/2$, б) $\mathcal{E}_x = 5\mathcal{E}/2$, в) $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}/2$, г) $\mathcal{E}_x = 7\mathcal{E}/2$.

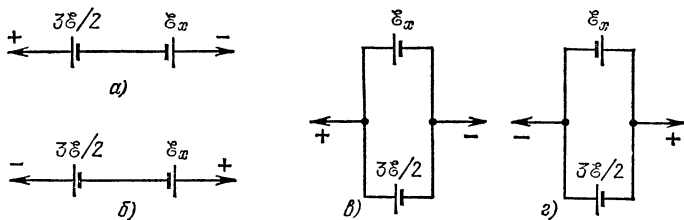


Рис. 3.120.

3.65. При зарядке аккумулятора ток внутри него течет от положительного полюса к отрицательному. Следовательно, в этом случае (см. решение задачи 3.60) напряжение на клеммах аккумулятора $V_1 = \mathcal{E} + I_1 r$. При разрядке аккумулятора имеем $V_2 = \mathcal{E} - I_2 r$. Определяя из этих уравнений \mathcal{E} и r , найдем ток короткого замыкания:

$$I_0 = \mathcal{E}/r = (V_1 I_2 + V_2 I_1)/(V_1 - V_2) = 71,3 \text{ А.}$$

3.66. Запишем равенство разностей потенциалов на генераторе, батарее и лампочке (в обозначениях рис. 3.121): $\mathcal{E}_1 - I_1 r_1 = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2 = IR$. Кроме того, $I_1 + I_2 = I$. Решая полученную систему, имеем

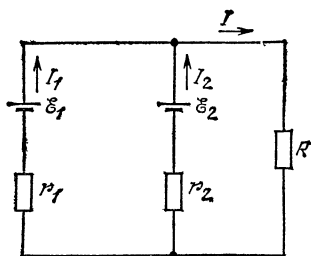


Рис. 3.121.

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2} = 3,65 \text{ А,}$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - IR}{r_2} = -1,58 \text{ А.}$$

Отрицательное значение тока I_2 означает, что ток через аккумуляторы (зарядный ток) течет в направлении, противоположном указанному на рисунке.

$$3.67. (R_2 + R_3)/R_3 = \mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1.$$

3.68. В предельном случае ток через аккумулятор равен нулю. Напряжение на клеммах аккумулятора и равное ему напряжение на зажимах генератора равны \mathcal{E}_1 . Получаем $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 - I r_2$. Отсюда ток через генератор $I = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/r_2 = 4 \text{ А.}$

Так как через аккумулятор ток не идет, такой же ток $4A$ идет через нагрузку.

3.69. Так как ток $I_2 = 0$, то напряжение на сопротивлении r_2 равно \mathcal{E}_2 . Ток через это сопротивление, а также ток I_1 (снова используем условие $I_2 = 0$) равны \mathcal{E}_2/r_2 .

3.70. Прямой расчет достаточно сложен. Однако решение можно заметно упростить, применив прием, основанный на принципе суперпозиции: на любом участке цепи полный ток есть алгебраическая сумма токов, создаваемых отдельными источниками. При определенных соотношениях между э. д. с. источников \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 можно добиться того, чтобы токи на разных участках цепи обращались в нуль. В частности: а) ток через батарею \mathcal{E}_1 равен нулю, если $\mathcal{E}_2 = 4\mathcal{E}_1$; б) ток через батарею \mathcal{E}_2 равен нулю, если $\mathcal{E}_1 = 4\mathcal{E}_2$. Соответствующий расчет мы предоставляем читателю.

Принцип суперпозиции позволяет сделать следующий вывод. Если в цепи (рис. 3.33) одновременно изменить \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , но так, чтобы $\Delta\mathcal{E}_2 = 4\Delta\mathcal{E}_1$, то это не вызовет изменения тока через батарею \mathcal{E}_1 . Аналогично, при $\Delta\mathcal{E}_1 = 4\Delta\mathcal{E}_2$ неизменным останется ток через батарею \mathcal{E}_2 . Таким образом, э. д. с. батареи \mathcal{E}_2 надо уменьшить в случае а) на $6V$, а в случае б) — на $0,375V$.

3.71. $V_{ab} = 18\mathcal{E}/11$.

3.72. Разность потенциалов между точками a и b равна падению напряжения на участке cd (рис. 3.35): $V_{ab} = \mathcal{E} - IR = 4\mathcal{E}/3$. Очевидно, что $V_{ab} = V_C - \mathcal{E}$, где V_C — искомая разность потенциалов на конденсаторе: $V_C = V_{ab} + \mathcal{E} = 7\mathcal{E}/3 > 0$. Следовательно, потенциал обкладки конденсатора, соединенной с резисторами, выше, чем потенциал обкладки, соединенной с батареей, т. е. эта обкладка заряжена положительно.

3.73. Внутренние сопротивления батарей пренебрежимо малы; значит, напряжения на батареях равны их э. д. с. Рассматривая замкнутый контур, включающий \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 и R_2 , видим, что на сопротивлении R_2 падение напряжения равно $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$; следовательно, ток через сопротивление R_2 равен $3\mathcal{E}/R$ (направлен слева направо на рис. 3.122). Применяя аналогичные рассуждения к замкнутому контуру \mathcal{E}_2 , \mathcal{E}_3 , R_3 , получим, что ток через R_3 равен $2\mathcal{E}/R$. Теперь, учитывая, что напряжение на R_3 равно $2\mathcal{E}$, и рассматривая контур R_1 , \mathcal{E}_1 , R_3 , получим ток через R_1 ; он равен \mathcal{E}/R . Токи через батареи можно найти из условия, что алгебраическая сумма токов, протекающих через каждый узел, равна нулю. В результате получаем, что ток через \mathcal{E}_1 равен $2\mathcal{E}/R$, ток через \mathcal{E}_3 равен $3\mathcal{E}/R$, а ток через \mathcal{E}_2 равен нулю.

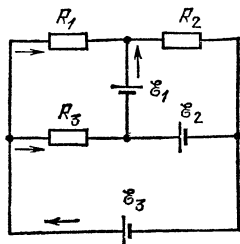


Рис. 3.122.

3.74. Показание вольтметра не изменится, если при разомкнутом ключе напряжение на участке цепи ab , содержащем батарею \mathcal{E}_x , равно нулю:

$$\mathcal{E}_x - \frac{\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2 + R_3} R_3 = 0, \quad \text{откуда} \quad \mathcal{E}_x = \frac{R_3(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}{R_1 + R_2}.$$

3.75. Обозначим сопротивление утечки конденсатора через R . Запишем закон Ома: $\mathcal{E} = I(R + r)$. Напряжение на конденсаторе $V = IR = \mathcal{E}R/(R + r)$.

Сопротивление конденсатора $R = \rho d/S$, его емкость $C = \epsilon \epsilon_0 S/d$, где S — площадь пластин конденсатора. Из этих соотношений получаем $R = \epsilon \epsilon_0 \rho / C$. И окончательно

$$E = V/d = \epsilon_0 \epsilon \mathcal{E} \rho / (\epsilon_0 \epsilon \rho + rC) d.$$

3.76. Результат, полученный в решении задачи 3.75 для плоского конденсатора: $R = \epsilon_0 \epsilon \rho / C$, можно обобщить на любую систему. Действительно, по близким эквипотенциальным поверхностям любую область пространства, заполненную проводящим диэлектриком, можно разбить на тонкие слои, а их, в свою очередь, на небольшие участки, которые можно считать плоскими конденсаторами. Для каждого такого конденсатора приведенная выше связь сопротивления и емкости справедлива. Затем при последовательном и параллельном соединении сопротивления и обратные емкости складываются одинаково, и в однородном веществе пропорциональность между ними сохранится. Следовательно, мы можем записать $R = \epsilon_0 \epsilon \rho / C = \epsilon_0 \rho / C_0 = 885 \text{ Ом}$, где C_0 — емкость конденсатора, не заполненного диэлектриком.

3.77. $F = \epsilon_0 \epsilon I^2 \rho^2 / 2S$.

3.78. Сопротивления утечки конденсаторов (см. решение задачи 3.75):

$$R_1 = \epsilon_1 \epsilon_0 \rho_1 / C_1, \quad R_2 = \epsilon_2 \epsilon_0 \rho_2 / C_2.$$

Падения напряжения на них соответственно:

$$V_1 = \frac{\mathcal{E} C_2 \rho_1 \epsilon_1}{\epsilon_1 C_2 \rho_1 + \epsilon_2 C_1 \rho_2}, \quad V_2 = \frac{\mathcal{E} C_1 \rho_2 \epsilon_2}{\epsilon_2 C_1 \rho_2 + \epsilon_1 C_2 \rho_1}.$$

3.79. Электрический ток в металле создается благодаря тому, что под действием внешнего электрического поля электроны начинают двигаться в некотором определенном направлении. При этом ток $I = \Delta q / \Delta t$, где Δq — количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за интервал времени Δt . Очевидно, что $\Delta q = Ne \Delta t$, где N — число электронов, прошедших через поперечное сечение проводника за единицу времени, а e — заряд электрона.

Рассмотрим теперь отрезок нашего провода (рис. 3.123). Путь, проходимый электронами при упорядоченном движении за время Δt , равен $l = v \Delta t$.

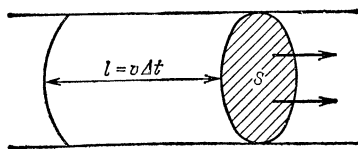


Рис. 3.123.

За время Δt через поперечное сечение успеют пройти только электроны, находящиеся в столбике, длина которого равна $v \Delta t$. Учитывая, что по условию задачи на каждый атом меди приходится только один электрон проводимости, найдем число атомов, содержащихся в столбике сечения S и длины $v \Delta t$.

Объем этого столбика $\Delta V = Sv \Delta t$. Пусть Δm — масса меди, содержащейся в объеме ΔV ; тогда число атомов в этом объеме $\Delta N = N_A \Delta m / A$, где N_A — постоянная Авогадро. Но $\Delta m = \rho \Delta V$, где ρ — плотность меди. Окончательно получаем $v = AI / N_A \rho Se = 7 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}$.

3.80. Ионы, возникающие под действием рентгеновских лучей внутри конденсатора, начинают двигаться к пластинам конденсатора под действием приложенного к нему напряжения. Ток через конденсатор $I_C = nev$, где n — число ионов (или электронов), образующихся в единицу времени в единице

объема конденсатора, e — заряд иона (равный заряду электрона), v — объем конденсатора. Имеем $V = V_{ab} + V_{bc} = I_{R_2} R_2 + I_{R_1} R_1$. Кроме того, $I_{R_1} = I_C + I_{R_2}$. Из этих уравнений следует, что

$$I_{R_1} = (V + I_C R_2) / (R_1 + R_2) = (V + nevR) / 2R = 8,5 \cdot 10^{-8} \text{ A}.$$

3.81. На основании законов Фарадея имеем $m = AQ/zF$, где z — валентность. Количество электричества $Q = It$; следовательно, $m = AIt/zF = 3,4 \text{ г}$.

3.82. $Q = It = 15 \text{ Кл}$, $m = AQ/zF = 5 \cdot 10^{-3} \text{ г}$.

3.83. $m = 0,13 \text{ г}$.

3.84. Масса никеля, выделившегося на поверхности изделия, $m = AQ/zF = 1,65 \text{ г}$; с другой стороны, $m = Spd$. Следовательно, $d = m/\rho S = 1,53 \cdot 10^{-3} \text{ см}$.

3.85. Сначала определим количество гремучего газа (в молях): $v = PV/RT$, где $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ — молярная газовая постоянная. При электролизе воды атомов водорода выделяется вдвое больше, чем атомов кислорода. Количество водорода $v_1 = 2v/3 = 2PV/3RT$. Учитывая, что молекула газообразного водорода состоит из двух атомов, с помощью законов Фарадея получаем искомый заряд: $Q = F \cdot 2v_1 = 4FPV/3RT = 5,2 \cdot 10^3 \text{ Кл}$.

3.86. $t = 4000 \text{ ч}$.

Работа и мощность электрического тока. Закон Джоуля — Ленца

3.87. При переключении ключа через батарею \mathcal{E} протечет некоторый заряд q . Работа батареи равна $\mathcal{E}q$. Эта работа может частично пойти на увеличение энергии, запасенной в конденсаторе, частично на выделение тепла в цепи. Как видно из рис. 3.39, заряд и, следовательно, энергия, запасенная в конденсаторе, не изменяются при переключении ключа. Меняются лишь знаки зарядов на обкладках. Следовательно, при переключении ключа K через батарею протек заряд $2C\mathcal{E}$ и в цепи выделилось количество тепла $Q = 2C\mathcal{E}^2$.

3.88. Емкость последовательно соединенных конденсаторов равна $2C/3$, заряд на них $q_1 = 2C\mathcal{E}/3$, а их энергия $U_1 = C\mathcal{E}^2/3$. После замыкания ключа K конденсатор C зарядится до напряжения \mathcal{E} , его заряд станет равным $q_2 = C\mathcal{E}$, а энергия $U_2 = C\mathcal{E}^2/2$. Работа батареи $A = \mathcal{E}(q_2 - q_1) = C\mathcal{E}^2/3$. Найдём выделившееся количество тепла: $Q = A - (U_2 - U_1) = C\mathcal{E}^2/6$.

3.89. Первоначально энергия конденсатора $U_1 = C\mathcal{E}^2/2$. После окончания зарядки напряжение на конденсаторе возросло до $5\mathcal{E}$, а его энергия стала равной $U_2 = 25C\mathcal{E}^2/2$. Через батарею протек заряд $4C\mathcal{E}$; ее работа $A = 20C\mathcal{E}^2$. Отсюда находим выделившееся количество тепла: $Q = A - (U_2 - U_1) = 8C\mathcal{E}^2$.

3.90. Энергия конденсатора меняется от $U_1 = 8C\mathcal{E}^2$ до $U_2 = C\mathcal{E}^2/2$. Заряды движутся против действия э. д. с. батарей. При этом выделившееся количество тепла $Q = A - (U_2 - U_1) = 9C\mathcal{E}^2/2$, где $A = -3C\mathcal{E}^2$.

3.91. При переключении ключа K (рис. 3.43) емкость цепи не меняется. (В обоих случаях к двум одинаковым конденсаторам, соединенным параллельно, подсоединен последовательно один конденсатор такой же емкости.) Напряжение на системе конденсаторов тоже неизменно и равно \mathcal{E} . Следовательно, энергия системы не изменяется, и вся произведенная батареей работа переходит в тепло. Для подсчета этой работы необходимо определить заряд, про-

текущий через батарею. Проще всего это сделать, проследив за зарядом левого конденсатора. До переключения на этом конденсаторе была половина заряда системы, т. е. $C\mathcal{E}/3$ (емкость системы равна $2C \cdot C/(C+2C)$). После переключения заряд удвоится. Значит, через батарею протечет заряд $C\mathcal{E}/3$ и, следовательно, батарея произведет работу $C\mathcal{E}^2/3$. Выделившееся количество тепла $Q = C\mathcal{E}^2/3$.

$$3.92. Q = 7C\mathcal{E}^2/16.$$

3.93. На заполненном диэлектриком конденсаторе находится заряд $q_1 = \epsilon C_0\mathcal{E}$, этот же заряд по условию сохраняется в начальный момент на незаполненном конденсаторе. Энергия в этот момент $U_1 = q^2/2C = \epsilon^2 C_0\mathcal{E}^2/2$. В конце заряд на конденсаторе $q_2 = C_0\mathcal{E}$, а его энергия $U_2 = C_0\mathcal{E}^2/2$. Обычным путем рассчитаем выделившееся количество тепла:

$$Q = (\epsilon - 1) C_0\mathcal{E}^2 - (1 - \epsilon^2) C_0\mathcal{E}^2/2 = (\epsilon - 1)^2 C_0\mathcal{E}^2/2 = 2 \text{ Дж.}$$

3.94. В первом варианте работа батареи $A_1 = 4C\mathcal{E}^2$, а энергия конденсатора $U = 2C\mathcal{E}^2$, к. п. д. $\eta_1 = 1/2$. Во втором варианте сначала работает один источник и совершает работу $A' = C\mathcal{E}^2$, затем оба и вместе совершают работу $A'' = 2C\mathcal{E}^2$. Вся работа $A_2 = 3C\mathcal{E}^2$, энергия конденсатора — прежняя, к. п. д. $\eta_2 = 2/3$. Искомое отношение к. п. д. $\eta_2/\eta_1 = 4/3$.

$$3.95. \text{Мощность } N = nC\mathcal{E}^2/2 = 10^{-2} \text{ Вт, к. п. д. } \eta = 0,5.$$

3.96. Составим уравнение теплового баланса: $cm(t - t_0) = V^2\tau/R$, где справа стоит количество тепла, выделившееся в проволоке при пропускании через нее тока за время τ . Все это количество тепла идет на нагревание проволоки (m — масса проволоки). Отсюда находим $\tau = cm(t - t_0)R/V^2$. Но $R = \rho l/S$, где l и S — длина и сечение проволоки. Кроме того, $m = dl\rho$. Окончательно имеем $\tau = c dl^2\rho(t - t_0)/V^2 = 7,5 \text{ с.}$

3.97. В первом случае ($I_1 = 4 \text{ А}$) мощность, отдаваемая аккумулятором во внешнюю цепь, $N_1 = I_1^2 R_1$, где $I_1 = \mathcal{E}/(R_1 + r)$, R_1 — сопротивление нагрузки. Ток в цепи изменился из-за изменения сопротивления нагрузки. При нагрузке R_2 имеем $N_2 = I_2^2 R_2$, где $I_2 = \mathcal{E}/(R_2 + r)$. Решая совместно полученные уравнения, найдем

$$N_2 = [N_1 I_2 - r I_1 I_2 (I_2 - I_1)]/I_1 = 11 \text{ Вт.}$$

3.98. Обозначим искомую э. д. с. батареи через \mathcal{E} , а ее внутреннее сопротивление — через r . Тогда мощность, рассеиваемая на резисторе R_1 , $N = \mathcal{E}^2 R_1/(R_1 + r)^2$. Та же мощность рассеивается и на резисторе R_2 : $N = \mathcal{E}^2 R_2/(R_2 + r)^2$. Приравняв правые части этих уравнений, получаем $r = \sqrt{R_1 R_2}$. Теперь находим э. д. с.: $\mathcal{E} = (\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}) \sqrt{N}$.

З а м е ч а н и е. Обсудим полученные результаты более подробно. Для этого еще раз перепишем выражение для мощности N , рассеиваемой на резисторе R :

$$N = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r + r^2/R},$$

из которого следует, что как при уменьшении, так и при неограниченном возрастании R мощность будет падать до нуля (рис. 3.124). Значит, при некотором промежуточном значении $R = R_0$ мощность N должна достигать своего

максимального значения N_0 . Для всех остальных $R \neq R_0$ каждому $N \neq N_0$ будут соответствовать два значения сопротивления нагрузки: R_1 и R_2 , связанные между собой полученным выше соотношением. Если допустить, что $R_1 = r$, то должно быть и $R_2 = r$. Очевидно, что это возможно только в точке $N = N_0$. Отсюда следует важный вывод: от источника с внутренним сопротивлением r максимальная мощность будет отбираться только в том случае, если сопротивление нагрузки тоже будет равно r . Эта максимальная мощность равна $N_0 = \mathcal{E}^2/4r$.

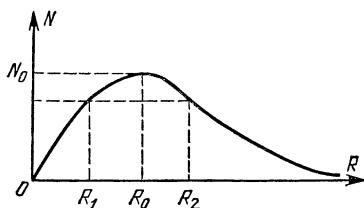


Рис. 3.124.

3.99. По аналогии с решением задачи 3.98 можно записать $r = \sqrt{R_1 R_2}$, где $R_1 = R$, а $R_2 = RR_x/(R + R_x)$. Отсюда $R_x = r^2 R/(R^2 - r^2)$. Если $R = r$, то $R_x \rightarrow \infty$. Это значит, что любое конечное R_x уменьшит мощность, отдаваемую внешней цепи (см. замечание к решению задачи 3.98). Очевидно, при $R < r$ задача не имеет решения.

3.100. Для того чтобы вскипятить чайник, требуется энергия E . Если включить первую обмотку, то $E = V^2 t_1 / R_1$, где V — напряжение сети, R_1 — сопротивление первой обмотки, t_1 — время, за которое чайник вскипает при включении первой обмотки. Аналогично, если включить вторую обмотку, $E = V^2 t_2 / R_2$. а) При параллельном соединении обмоток $E = V^2 t_3 / R_1 + V^2 t_3 / R_2 = V^2 t_3 (1/R_1 + 1/R_2)$ и время, за которое чайник вскипает, $t_3 = t_1 t_2 / (t_1 + t_2) = 6$ мин. б) При последовательном соединении обмоток $E = V^2 t_4 / (R_1 + R_2)$ и $t_4 = t_1 + t_2 = 25$ мин.

3.101. Мощность, выделяемая на нагрузке, максимальна, если сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника (см. решение задачи 3.98). При этом на нагрузке будет выделяться мощность $N = 16$ Вт, а полная мощность аккумулятора составит $N_a = 32$ Вт. Цепь, имеющую сопротивление $R = 1$ Ом из четырех элементов с сопротивлением 1 Ом каждый, можно составить, включив их попарно последовательно и соединив параллельно образовавшиеся цепочки (или наоборот, элементы соединив параллельно, а цепочки — последовательно).

В принципе можно использовать только один элемент; при этом также будет выделяться максимально возможная мощность во внешней цепи. Это, однако, может привести к перегреву элемента — он не будет успевать отдавать тепло и может перегореть.

3.102. Разберем для определенности цепь с $n = 5$ (рис. 3.125). Пусть батарея подсоединяется к точкам 1 и 2. Между точками 1 и 2 включено сопротивление r . Параллельно через точку 3 подсоединено сопротивление $2r$, то же — через точку 4 и т. д. Тот факт, что точки 3 и 4, 3 и 5, 4 и 5 соединены между собой, не играет роли, так как при подключении батареи к точкам 1 и 2 потенциалы точек 3, 4, 5 будут одинаковы и, следовательно, включенные

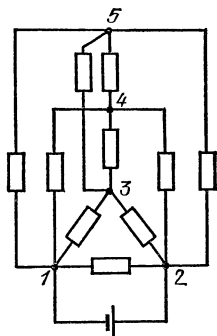


Рис. 3.125.

между ними сопротивления не оказывают влияния на суммарное сопротивление цепи.

Таким образом, цепь состоит из сопротивления r и параллельно с ним соединенных $n-2$ сопротивлений $2r$. Общее внешнее сопротивление цепи

$$R = \frac{1}{1/r + (n-2)/2r} = \frac{2r}{n}.$$

Искомая мощность

$$N = I^2 R = \left(\frac{\mathcal{E}}{r+R} \right)^2 R = \frac{2\mathcal{E}^2 n}{(n+2)^2 r}.$$

3.103. Пусть \mathcal{E} — э. д. с. источника, а r — суммарное сопротивление источника и проводов. Тогда ток короткого замыкания $I_k = \mathcal{E}/r$. Но $r = \sqrt{R_1 R_2}$, $\mathcal{E} = (\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}) \sqrt{N}$ (см. решение задачи 3.98). Окончательно будем иметь $I_k = \sqrt{N/R_1} + \sqrt{N/R_2} \approx 1,63$ А.

3.104. Мощность, развиваемая генератором, $N_0 = \mathcal{E}^2/(r+R)$, где R — сопротивление нагрузки. Отсюда $R = \mathcal{E}^2/N_0 - r$. Полезная мощность $N = I^2 R = (N_0/\mathcal{E})^2 (\mathcal{E}^2/N_0 - r)$. Таким образом, к. п. д. $\eta = N/N_0 = 1 - N_0 r/\mathcal{E}^2$.

3.105. Мощность генератора $N_0 = \mathcal{E}^2/(r+R)$, где \mathcal{E} — э. д. с. генератора, R — сопротивление нагрузки. Полезная мощность $N = I^2 R = \mathcal{E}^2 R/(R+r)^2$. Таким образом, $\eta = N/N_0 = R/(r+R)$. Отсюда $R = r\eta/(1-\eta)$.

3.106. Полная мощность, выделяющаяся в цепи, $N_0 = \mathcal{E}^2/(R+r)$, где R — сопротивление нагрузки, r — сопротивление линии передачи и источника. При $R = R_1$ мощность потерь $N_1 = \mathcal{E}_1^2 r/(R_1+r)^2$, где \mathcal{E}_1 — начальное напряжение источника. Повысив напряжение до \mathcal{E}_2 , необходимо изменить и сопротивление нагрузки, так как отдаваемая генератором мощность должна оставаться постоянной. Имеем $N_2 = \mathcal{E}_2^2 r/(R_2+r)^2$. По условию

$$\frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} \right)^2 \left(\frac{R_2+r}{R_1+r} \right)^2 = 100.$$

Полная мощность в обоих случаях одинакова: $(R_2+r)/(R_1+r) = \mathcal{E}_2^2/\mathcal{E}_1^2$. Используя это условие, получаем $\mathcal{E}_2^2/\mathcal{E}_1^2 = 100$. Таким образом, напряжение следует повысить в 10 раз.

3.107. Разность показаний счетчиков увеличивается из-за потерь электроэнергии на нагревание подводящих проводов, имеющих сопротивление r . Пусть начальное напряжение источника равно V_1 и ток в цепи равен I_1 . В этом случае мощность потерь $N_1 = I_1^2 r$, причем $I_1 = N/V_1$, где $N = 1000$ кВт — полная мощность, отдаваемая трансформатором. Мощность N_1 можно выразить через разность показаний счетчиков n_1 и n_2 : $N_1 = (n_1 - n_2)/t = \Delta n/t$, где t — время, за которое разность показаний увеличивается на Δn . При повышении напряжения до V_2 и токе в цепи I_2 имеем мощность потерь $N_2 = I_2^2 r$, причем $I_2 = N/V_2$. Система уравнений приводит к соотношению $N_2/N_1 = V_1^2/V_2^2$. Учитывая условие $N_2 = 10^{-3}N$, получаем $V_2 = \sqrt{\Delta n/10^{-3}Nt} V_1 = 18$ кВ.

3.108. $V = 26 \sqrt{Nr}/5 = 14$ кВ.

3.109. Падение напряжения на сопротивлении R_0 $V_0 = VR_0/(R+R_0)$, где R — сопротивление нагрузки. По условию $V_0 = 0,08V$, откуда $VR_0/(R+R_0) = 0,08V$, или $R = 11,5R_0$. Мощность, отдаваемая потребителю, $N = V^2 R/(R +$

$+R_0)^2$. Следовательно, $R_0 = 11,5V^2/156N = 7,1$ Ом. Так как $R_0 = 2\rho l/S$, то масса меди, требующейся для проволоки такой линии, $M = 2dlS$. Исключив S из последних равенств, окончательно получим $M = 4\rho dl^2/R_0 = 2140$ кг.

3.110. $N_R = \mathcal{E}_1(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/r = 0,16$ Вт, $N_r = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)^2/r = 0,32$ Вт. К точке c надо подсоединить отрицательный полюс батареи \mathcal{E}_2 , $R_{bc} = \mathcal{E}_1 r / (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) = 100$ Ом.

3.111. Если воспользоваться законом Ома: $\mathcal{E} = V + Ir$, то легко получить $I = -2$ А. Отрицательное значение тока говорит о том, что во внешней цепи ток течет против того направления, в котором он бы тек, если бы наша батарея была единственным источником э. д. с. в цепи (т. е. слева направо на рис. 3.126). Выделяющееся в единицу времени количество тепла $Q = I^2 r = 4$ Вт.

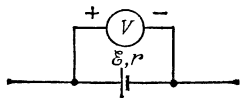


Рис. 3.126.

3.112. Так как положительный полюс батареи подсоединен к отрицательной клемме вольтметра, потенциал точки b (рис. 3.50) выше потенциала точки a . Следовательно, напряжение V в законе Ома (см. решение задачи 3.111) мы должны считать отрицательной величиной. Тогда $I = (\mathcal{E} + V)/r = 6$ А, $Q = I^2 r = 36$ Вт.

3.113. Тепловыделение в единицу времени линейно зависит от I^2 ; следовательно, можно взять среднее арифметическое начального и конечного значений I^2 . Получаем $Q = (I_0^2/2) R t_0 = k^2 t_0^3 R/2$, где I_0 — конечное значение тока, достигаемое в момент времени t_0 . Отсюда имеем $t_0 = \sqrt{2Q/Rk^2} = 6$ с.

3.114. $Q = k^2 t^2/2R = 200$ Дж.

3.115. Количество тепла, выделяемое в единицу времени при пропускании тока через проволоку, пропорционально квадрату тока: $Q = I^2 R$. Количество же тепла, отдаваемое в окружающее пространство, пропорционально разности температур проволоки и воздуха: $Q' = k(t - t_0)$, где k — коэффициент, постоянный во всех трех рассматриваемых случаях, t — температура проволоки, t_0 — температура воздуха. При длительном пропускании тока устанавливается тепловое равновесие: $Q = Q'$. Значит, для всех трех режимов имеем

$$I_1^2 R = k(t_1 - t_0), \quad I_2^2 R = k(t_2 - t_0), \quad I_3^2 R = k(t_x - t_0).$$

Решая эту систему уравнений, получаем $t_x = 580$ °С.

3.116. При длительном протекании тока проводник достигает такой температуры, что все выделяющееся в нем тепло отдается в окружающее пространство. Так как в нашем случае проводники включены параллельно, количество отдаваемого в единицу времени тепла обратно пропорционально сопротивлению ($Q = V^2/R$) и, следовательно, площади сечения. Значит, в толстой проволоке выделяется в четыре раза больше тепла, чем в тонкой, а ее поверхность больше поверхности тонкой проволоки лишь вдвое. Чтобы температура оставалась постоянной, толстая проволока должна отдавать с единицы поверхности вдвое больше тепла. Отсюда следует, что разность температур толстой проволоки и воздуха вдвое больше разности температур тонкой проволоки и воздуха, а значит, и тепловое удлинение толстой проволоки будет вдвое больше.

Рассуждая подобным образом, приходим к выводу, что при последовательном включении удлинение тонкой проволоки в восемь раз больше удлинения толстой проволоки.

Нелинейные элементы в цепях постоянного тока

3.117. При протекании тока от A к B сопротивление диода равно нулю (рис. 3.127, a). Расчет дает значение $R_{AB}=20$ Ом. При противоположном направлении тока диод эквивалентен разрыву цепи (рис. 3.127, b). Сопротивление $R_{BA}=82,5$ Ом.

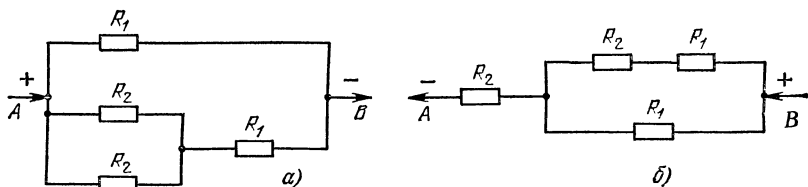


Рис. 3.127.

3.118. Если предположить, что диод заперт, то мы получим потенциал левого контакта диода $V_1=75$ В, а правого — $V_2=66^{2/3}$ В. Но при такой полярности напряжения на диоде он будет открыт и его сопротивление равно нулю. Расчет (см. решение задачи 3.56) дает значение тока через диод $I=4$ мА.

3.119. Фотоэлемент открыт (см. решение задачи 3.118), т. е. ток через него $I_0=10$ мА и направлен от анода к катоду. Если I_1 — ток через сопротивление $R_1=1$ кОм, то ток через $R_3=3$ кОм равен $I_3=I_1-I_0$. Сумма падений напряжений на R_1 и R_3 равна $V=100$ В, т. е. $I_1 R_1 + (I_1 - I_0) R_3 = V$. Отсюда найдем $I_1=32,5$ мА и, следовательно, $I_3=22,5$ мА. Потенциал анода $V_a=67,5$ В. Аналогично проводится расчет потенциала катода: $V_k=46,7$ В. Следовательно, искомое напряжение на фотоэлементе $V_\phi=20,8$ В.

3.120. Из симметрии задачи ясно, что напряжения на резисторах и нелинейных элементах равны и токи через них одинаковы. Следовательно, $\alpha I^2 = RI = \mathcal{E}/2$. Отсюда получаем $\mathcal{E}=2R^2/\alpha$.

3.121. При сбалансированном мостике напряжение на резисторе r_1 равно $V_1=\mathcal{E}r_1/(r_1+r_2)$, напряжения на резисторах r_1 и R равны; следовательно, ток в верхней ветви $I_1=V_1/R$. Теперь приравняем два выражения для напряжения на нелинейном элементе: $(I_1/\alpha)^{1/2}=\mathcal{E}r_2/(r_1+r_2)$. Решая совместно полученную систему уравнений, находим $\alpha=r_1(r_1+r_2)/R\mathcal{E}r_2^2=0,0125$ А/В².

3.122. Минимальный ток через резистор R , при котором конденсатор не разряжается, должен равняться $I=1$ мА. Но падение напряжения на этом резисторе при горящей лампе не превышает 40 В; значит, его сопротивление не может превышать $R=40$ кОм.

3.123. Пока напряжение на трубке не превышает V_H , зависимость тока от напряжения линейная и трубку можно считать обычным резистором с сопротивлением $R=V_H/I_H$. Запишем закон Ома для двух случаев (при балластном сопротивлении R_{60} ток равен I_0 , при балластном сопротивлении R_6 ток равен I_H):

$$\mathcal{E}=I_0(R_{60}+R+r), \quad \mathcal{E}=I_H(R_6+R+r),$$

где r — внутреннее сопротивление источника. Решая систему уравнений, по-

лучаем

$$\Delta R_0 = R_0 - R_{00} = \mathcal{E} (1/I_n - 1/I_0) = -2 \cdot 10^3 \text{ Ом.}$$

Итак, балластное сопротивление надо уменьшить на 200 МОм.

3.124. $I = 10 \text{ мкА}$, $V = 3 \text{ кВ}$.

3.125. При напряжении на элементе, превышающем V_0 , зависимость тока через элемент I от напряжения на нем V можно представить в виде $I = (V - V_0)/R_0$. Величина R_0 обычно называется дифференциальным сопротивлением. В наших трех случаях условие $V > V_0$ выполнено. Поэтому

$$\mathcal{E} - V_0 = I_1(r + R_1 + R_0), \quad \mathcal{E} - V_0 = 2I_1(r + R_2 + R_0), \quad \mathcal{E} - V_0 = I_x(r + R_0),$$

где r — внутреннее сопротивление батареи, I_x — искомый ток. Решая систему уравнений, получаем

$$I_x = I_1 \cdot 2I_1(R_2 - R_1)/(R_1I_1 - R_2 \cdot 2I_1) = 2 \text{ мА.}$$

3.126. $\mathcal{E} = V_0 + rI_1I_2/(I_1 - I_2) = 150 \text{ В}$.

3.127. Сумма падений напряжений в цепи равна действующей в цепи э. д. с.: $\mathcal{E} = IR + A + B/I$. Получим выражение для тока:

$$I = \{\mathcal{E} - A \pm [(\mathcal{E} - A)^2 - 4RB]^{1/2}\}/2R.$$

Отсюда получаем, что $R \leq (\mathcal{E} - A)^2/4B = 20,25 \text{ Ом}$. Для $R = 8 \text{ Ом}$ имеем два возможных значения тока: $I_1 = 1,25 \text{ А}$, $I_2 = 10 \text{ А}$. Рассмотрим эти две возможности (рис. 3.128). Прямая, исходящая из точки \mathcal{E} , изображает зависимость от тока величины $\mathcal{E} - IR$, а кривая — зависимость от тока напряжения на дуге $V = A + B/I$. Токи I_1 и I_2 соответствуют точкам пересечения прямой и кривой.

Пусть ток в цепи равен I_1 . Если ток в цепи случайно немного уменьшится и примет значение I'_1 , напряжение на дуге резко возрастет, напряжение на резисторе R окажется недостаточным для поддержания тока I'_1 , ток еще уменьшится и так будет продолжаться, пока дуга не погаснет. При случайном возрастании тока на напряжение на дуге оказывается столь малым, что ток через резистор R должен возрасти — в этом случае процесс кончается переходом в режим, соответствующий току I_2 . Если же в цепи установился ток I_2 , то случайные его изменения приводят к компенсации возмущений. Например, если ток несколько увеличился, то напряжение на дуге падает на столь малую величину, что напряжение, остающееся на резисторе R , оказывается недостаточным для поддержания нового значения тока, ток уменьшается. Итак, состояние с током в цепи $I_1 = 1,25 \text{ А}$ неустойчиво; в цепи установится ток $I_2 = 10 \text{ А}$.

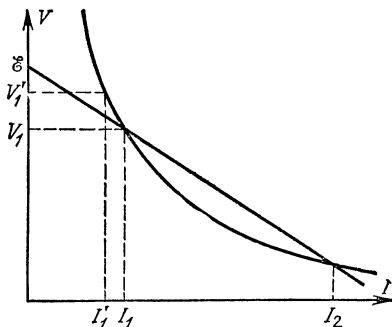


Рис. 3.128.

3.128. Вольтамперная характеристика имеет качественно тот же вид, что и характеристика дуги, рассмотренной в задаче 3.127. Для решения задачи необходимо построить из точки $I = 0$, $V = 85 \text{ В}$ прямую, касательную к кривой, изображенной на рис. 3.60. Прямая дает зависимость $\mathcal{E} - IR$ от тока для

предельного значения сопротивления резистора R . Из наклона прямой определим $R=4,6$ Ом.

3.129. Точки характеристики цепи, соответствующие значению $V=\mathcal{E}=80$ В, дают два возможных значения тока: $I_1=2,5$ А, $I_2=17,5$ А. Анализ показывает (см. решение задачи 3.127), что устойчив режим с током I_2 .

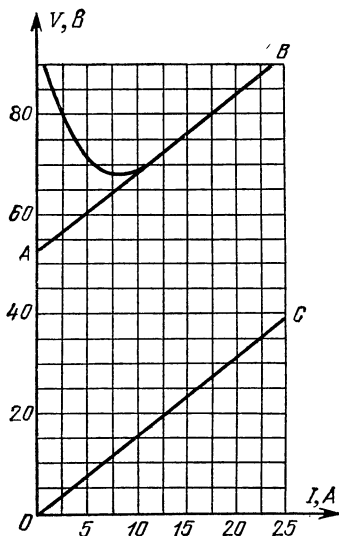


Рис. 3.129.

Построим вольтамперную характеристику дуги без балластного резистора. Для этого через участок характеристики, соответствующий самым большим токам, проведем прямую AB (рис. 3.129). Затем через начало координат проведем прямую OC , параллельную AB . Расстояние по вертикали (в вольтах) от OC до характеристики дуги вместе с резистором дает нам вольтамперную характеристику собственно дуги. Она оказывается такой, как изображена на рис. 3.60. Дальнейший путь решения совпадает с решением задачи 3.128. Максимальное сопротивление получается равным $R=3,8$ Ом.

3.130. Ток через нагрузку постоянен и равен $I_H=15$ мА. Так как ток через стабиловольт I_C изменяется от 5 до 15 мА, то общий ток, протекающий через сопротивление резистора R , меняется в пределах от $I_{\min}=20$ мА до $I_{\max}=30$ мА. Запишем

закон Ома для предельных режимов работы стабиловольта ($V=150$ В — напряжение на нагрузке):

$$1,1\mathcal{E} - V = RI_{\max}, \quad 0,9\mathcal{E} - V = RI_{\min}.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$\mathcal{E} = \frac{V(I_{\max} - I_{\min})}{0,9I_{\max} - 1,1I_{\min}} = 300 \text{ В}, \quad R = \frac{1,1\mathcal{E} - V}{I_{\max}} = 6 \text{ кОм}.$$

3.131. Построим нагрузочную характеристику резистора r , т. е. зависимость напряжения на резисторе от тока на нем: $V=\mathcal{E}-Ir$. Это будет прямая, проходящая через точки $I=0,4$ А, $V=0$ и $I=0$, $V=4$ В (рис. 3.63, а). Пересечение этой прямой с характеристикой лампочки дает значение тока в цепи, содержащей резистор с сопротивлением r и лампочку, $I=0,24$ А и напряжение на лампочке $V=1,6$ В. Напряжение на резисторе $V=2,4$ В. Соответственным образом движок потенциометра должен делить полное сопротивление R , с тем чтобы между точками A и B напряжение было равно нулю. Следовательно, верхняя на рис. 3.63, б часть потенциометра должна иметь сопротивление 24 Ом.

Проведем касательную к характеристике лампочки в рабочей точке ($I=0,24$ А, $V=1,6$ В). Наклон ее в первом приближении определяет связь тока и напряжения на лампочке. Из графика получаем $\Delta V/\Delta I=12,6$ Ом. Эту величину называют дифференциальным сопротивлением лампочки: $r_d=12,6$ Ом. Изменения напряжения между точками A и B будут минимальными, если мост сбалансирован по дифференциальным сопротивлениям (для линейных ре-

зисторов $\Delta V/\Delta I = V/I$, т. е. обычное, интегральное, и дифференциальное сопротивления совпадают). Получаем для сопротивления верхней части потенциометра $Rr/(r+r_d) = 17,7 \text{ Ом}$.

Рекомендуем читателю подробно проанализировать условие дифференциальной балансировки моста.

3.132. Запишем закон Ома для цепи, содержащей нелинейный элемент: $\sqrt{I/k} + RI = \mathcal{E}$, где $k = 0,01 \text{ А/В}^2$. Решая его, получаем $I = 0,1225 \text{ А}$. Тогда напряжение на нелинейном элементе $V = 3,5 \text{ В}$. Подсчитаем мощность тепловых потерь на нелинейном элементе: $N = IV = 0,43 \text{ Вт}$. Заметим, что для нелинейного элемента не существует понятия сопротивления в обычном смысле как отношения V/I . Поэтому формулы расчета количества тепла $Q = I^2 R$ и $Q = V^2/R$ к нему применять нельзя.

3.133. $N = 8,3 \text{ Вт}$.

3.134. С помощью построения, описанного в решении задачи 3.131, находим напряжение на лампочке и ток через нее: $V = 5,5 \text{ В}$, $I = 1,1 \text{ А}$. Следовательно, мощность лампочки $N = IV = 6 \text{ Вт}$. Мы умышленно округляем результат, так как значения тока и напряжения можно получить из графика с не очень высокой точностью. Это же касается и ряда других задач, в которых даны графики (см. задачи 3.128, 3.129, 3.131). Поэтому читателя не должно смущать, если полученные им в этих задачах числовые ответы несколько отличаются от тех, которые приведены в книге.

3.135. Во втором опыте температура элемента $t_3 = 80^\circ \text{C}$; следовательно, его сопротивление $R_3 = 50 \text{ Ом}$. Из уравнения теплового баланса можем подсчитать коэффициент пропорциональности между количеством выделяющегося в единицу времени тепла и разностью температур:

$$\alpha = V_1^2/R_3 (t_3 - t_0) = 1,2 \text{ Вт/К}.$$

Колебания тока в цепи, возникшие в третьем опыте, связаны с колебаниями температуры между значениями t_2 и t_1 и соответствующими колебаниями сопротивления. При этом отдаваемое в единицу времени количество тепла $q = \alpha (t - t_0) \approx 95 \text{ Вт}$, где t — средняя температура элемента в этом опыте ($t_1 > t > t_2$). Из соотношения между количеством тепла, выделяющимся на элементе, и количеством тепла, отдаваемым воздуху, определим время τ_1 нагрева от 99 до 100°C , время охлаждения τ_2 и период колебаний T , равный их сумме:

$$T = \tau_1 + \tau_2 = \frac{C}{V_1^2/R_1 - \alpha(t - t_0)} + \frac{C}{\alpha(t - t_0) - V_2^2/R_2} = 0,2 \text{ с}.$$

Ток в цепи принимает значения $I_{\max} = 1,6 \text{ А}$ и $I_{\min} = 0,8 \text{ А}$.

Заряженные частицы в электрическом и магнитном полях

3.136. Условие равновесия капельки: $mg = 2eE$, где $m = 4\pi r^3 \rho/3$ — масса капельки, e — заряд электрона, $E = V/d$ — напряженность электрического поля внутри конденсатора. Отсюда получаем $e = 4\pi r^3 \rho g d/(3 \cdot 2V) = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

3.137. Напряжение, при котором капелька находится в равновесии, $V = 4\pi r^3 \rho d_1 g/9e = 4350 \text{ В}$ (см. решение задачи 3.136).

а) Если раздвигать пластины, когда они соединены с источником напряжения (т. е. при $V = \text{const}$), то напряженность поля внутри конденсатора

уменьшится, так как $V = E_1 d_1 = E_2 d_2$, $E_2 = E_1 d_1 / d_2$, где $d_2 > d_1$. Электрическая сила, действующая на капельку, $F = 3eE$ определяется напряженностью поля; следовательно, эта сила уменьшится и капелька начнет падать.

б) Если раздвигать пластины, когда они отключены от источника напряжения, то заряд конденсатора сохраняется: $q = \text{const}$. В этом случае сохраняется и напряженность электрического поля, поскольку она определяется зарядом конденсатора и не зависит от расстояния между пластинами. Равновесие капельки не нарушится.

3.138. $v = (2ZeV/Am_p)^{1/2} = 4,1 \cdot 10^3$ м/с, где $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг — масса протона.

3.139. Так как между пластинами A и D разность потенциалов $V_{AD} = 0$, то результирующая кинетическая энергия, с которой электрон достигает пластины D , также равна нулю. Следовательно, скорость $v_D = 0$. Скорости v_B и v_C легко рассчитать на основании закона сохранения энергии: $v_B = (2\gamma V_{AB})^{1/2} = 8,4 \cdot 10^6$ м/с, $v_C = 6 \cdot 10^6$ м/с.

3.140. Найдем вертикальное смещение h электрона внутри конденсатора и вертикальную скорость v_y при вылете из него. Учтя, что $T = mv_0^2/2$, получаем $h = eVt^2/4dT$, $v_y = eVt/mdv_0$. По вылете из конденсатора электрон летит прямолинейно по инерции. Угол θ между пластинами и направлением полета электрона (рис. 3.68) определяется соотношением $\tg \theta = v_y/v_0 = eVt/2dT$. Добавочное смещение $S = L \tg \theta = eVL/2dT$. Отсюда

$$x = h + S = \frac{eVl}{2dT} \left(\frac{l}{2} + L \right) = 0,5 \text{ см.}$$

Так как в это выражение масса частицы не входит, а заряд протона равен (по модулю) заряду электрона, то смещение протона будет равно смещению электрона, но направлено в противоположную сторону.

3.141. Вниз пылинка движется равномерно со скоростью $v_0 = d/t_0$; значит, сила тяжести mg уравновешена силой сопротивления воздуха αv_0 . При движении пылинки вверх, кроме силы тяжести mg и силы сопротивления воздуха $\alpha v = \alpha d/t$, на нее действует сила со стороны электрического поля qV/d , где q — заряд пылинки: $\alpha v + mg = qE$. В результате получаем

$$\gamma = q/m = g(1 + t_0/t) d/V = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг.}$$

3.142. $q = mg d^2/2eV = 10^{-17}$ Кл.

3.143. $I = em_t N_A/A = 24$ А, $N = IV = 24$ кВт.

3.144. По мере оседания электронов на второй пластине конденсатор заряжается и его поле препятствует движению последующих электронов. Фототок прекратится, когда вся кинетическая энергия электрона будет расходоваться на работу прогив сил электрического поля: $mv^2/2 = eV$, где V — разность потенциалов между пластинами, при которой прекратится фототок. Но $V = Ed = qd/\epsilon_0 S$, где q — заряд конденсатора в момент прекращения фототока. Заряд конденсатора связан с числом электронов, поступающих на пластину в единицу времени, соотношением $q = enfS$. Решая совместно полученные уравнения, имеем $t = \epsilon_0 mv^2/2e^2 nd = 1,56 \cdot 10^{-7}$ с.

3.145. $\mathcal{E} = v_0^2/2\gamma = 5 \cdot 10^4$ В.

3.146. Определим э.д.с. элементов:

$$\mathcal{E}_1 = T_1/2e = 10 \text{ кВ}, \quad \mathcal{E}_2 = T_2/2e = 20 \text{ кВ},$$

где $2e = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд α -частицы. а) При последовательном соединении э.д.с. батареи равна сумме э.д.с. элементов, т. е. 30 кВ. б) При параллельном соединении э.д.с. батареи равна 20 кВ; при этом один из элементов будет заперт уже при напряжении 10 кВ и работать будет лишь элемент, в котором источник испускает α -частицы с более высокой энергией.

3.147. Потенциальная энергия двух взаимодействующих одинаковых зарядов $U = q^2/4\pi\epsilon_0 r$, где r — расстояние между зарядами. Сила взаимодействия протонов максимальна тогда, когда вся кинетическая энергия протонов перейдет в потенциальную: $U = T$. Отсюда, используя закон Кулона, найдем $F = 4\pi\epsilon_0 T^2/q^2 = 110$ Н.

3.148. Из соображений симметрии ясно, что α -частица останется на месте и потенциальная энергия взаимодействия всех трех частиц перейдет в кинетическую энергию протонов:

$$2 \cdot \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2a} = mv^2, \quad v = \left(\frac{9e\gamma}{8\pi\epsilon_0 a} \right)^{1/2} = 800 \text{ м/с.}$$

3.149. Частицы должны быть расположены на одной линии напряженности. Силы (рис. 3.130)

$$f = qQ/4\pi\epsilon_0 d^2, \quad F_1 = qE, \quad F_2 = QE.$$

Применим второй закон Ньютона к движению тел:

$$ma = -qE + qQ/4\pi\epsilon_0 d^2, \quad Ma = QE - qQ/4\pi\epsilon_0 d^2.$$

Отсюда вытекает, что $a = (Q - q)E/(m + M)$. Это выражение для a можно было написать сразу, приняв во внимание, что система из двух зарядов движется как единое целое в поле напряженности E . Заметим, что такая конфигурация зарядов неустойчива и при небольшом случайном отклонении от нее частицы столкнутся или разлетятся. Искомое расстояние

$$d = [(mQ + Mq) qQE/4\pi\epsilon_0]^{1/2}.$$

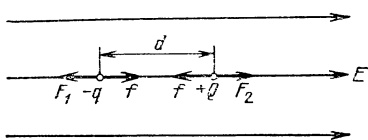


Рис. 3.130.

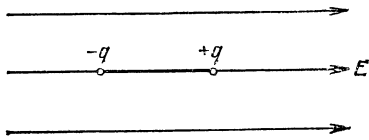


Рис. 3.131.

3.150. В положении устойчивого равновесия диполь ориентирован вдоль направления поля, причем так, что заряд $+q$ смещен в направлении линии напряженности (рис. 3.131). При повороте диполя на 180° заряды меняются местами. Для этого необходимо совершить работу $A = A^- + A^+ = -(-q)El + +qEl = 2qEl$.

3.151. $A = lqQ \sin \alpha/\epsilon_0 S$.

3.152. Составляющая скорости электрона, параллельная плоскости сетки, не будет меняться. Составляющая скорости, перпендикулярная сетке, на расстоянии h от сетки обратится в нуль. Используя закон сохранения энергии, получим $h = \frac{v^2 \cos^2 \alpha \cdot d}{2\gamma V} = 5$ мм.

3.153. $T \geq 4qV$.

3.154. $\alpha \geq 30^\circ$.

3.155. $\alpha = 15^\circ$.

3.156. Чтобы покинуть шарик, электрон должен совершить работу $eQ/4\pi\epsilon_0 r$. Значит, запас кинетической энергии электрона не должен быть меньше этой величины; иначе, отлетев на какое-то расстояние от шарика, электрон остановится и под действием притяжения со стороны шарика возвратится на него. Отсюда получаем условие для максимального заряда:

$$eQ/4\pi\epsilon_0 r = mv^2/2, \text{ или } Q = 4\pi\epsilon_0 v^2 r/2\gamma.$$

3.157. Из закона сохранения энергии имеем $mv^2/2 - mv_0^2/2 = -eV$, где $V = -Q/4\pi\epsilon_0 R$ — потенциал шара. Отсюда $v_0 = (v^2 + 2\gamma Q/4\pi\epsilon_0 R)^{1/2}$.

3.158. Для ионизации атома неона электрон должен на длине свободного пробега l приобрести энергию U . Тогда начнется лавинный разряд, т. е. лампа загорится. Следовательно, искомое напряжение $V = Ud/le = 216$ В.

3.159. Как следует из рис. 3.75, напряженность поля максимальна в начале и в конце трубки и равна $E = 3,5$ кВ/см. Отсюда можно определить длину свободного пробега (см. решение задачи 3.158): $l = 7,5 \cdot 10^{-5}$ м.

3.160. $V = 14,7$ кВ.

3.161. На частицу в электрическом поле действует сила qE , где q — заряд частицы, а E — напряженность поля в точке, где находится частица. Из соображений симметрии ясно, что напряженность поля во всех точках траектории одинакова и направлена перпендикулярно скорости.

Заряд протона равен (по модулю) заряду электрона e ; его массу обозначим через m_p . Тогда в случае движения протона по окружности напряженность поля E_1 должна удовлетворять условию $eE_1 = m_p v^2/R$. Заряд α -частицы (ядра атома He) равен $2e$; ее масса равна $4m_p$. Поэтому для движения α -частицы по окружности необходима напряженность поля E_2 , удовлетворяющая условию $2eE_2 = 4m_p v^2/R$. Из этих соображений получаем $E_2/E_1 = 2$.

3.162. Заряд на единицу площади потока $\sigma = nde$, где d — ширина щели (и потока). У поверхности потока возникает электрическое поле напряженности $E = \sigma/2\epsilon_0$. Находящиеся в этом поле крайние электроны получают ускорение $a = eE/m$. За время $t = l/v$ (где l — искомое расстояние от щели) они сдвинутся в поперечном направлении на расстояние $d/2$, т. е. $at^2/2 = d/2$.

Решая полученную систему уравнений, имеем $l = \frac{v}{e} \left(\frac{2\epsilon_0 m}{n} \right)^{1/2} = 2,5$ см.

3.163. Чтобы электрон долетал до точки $x = 1,5$ мм, его начальная энергия должна быть равной $eV_m = 2,25$ эВ. Рассматривая движение электрона, равнозамедленное на пути $l_1 = 1,5$ мм, а затем (после прохождения точки минимального потенциала V_m) равноускоренное на пути $l_2 = 12$ мм, получаем время полета:

$$\tau = V\sqrt{2} \left(l_1/\sqrt{V_m} + l_2/\sqrt{V_m + V_a} \right) = 10^{-2} \text{ с.}$$

3.164. Потенциалы анода и катода одинаковы; следовательно, энергия вылетевшего из катода электрона равна его энергии у анода. Расчет дает $\tau = 1,2 \cdot 10^{-2}$ с.

3.165. Если скорость заряженной частицы, движущейся в магнитное поле, перпендикулярна линиям индукции поля, сила Лоренца равна evB и направлена перпендикулярно скорости и линиям индукции. Частица в этом случае

движется по окружности, радиус которой R можно определить из второго закона Ньютона: $mv^2/R = evB$. В условиях нашей задачи частица пройдет в области, где имеется магнитное поле, часть окружности (рис. 3.132), соответствующую углу $\beta = 120^\circ$. Глубина проникновения

$$h = R(1 - \sin \alpha) = \frac{v}{\gamma B}(1 - \sin \alpha) = 28 \text{ мм.}$$

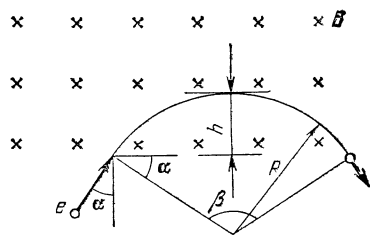


Рис. 3.132.

3.166. Составляющая скорости $v \cos \alpha$, направленная вдоль магнитного поля, остается неизменной. В проекции на плоскость, перпендикулярную индукции поля, электрон описывает окружность (см. решение задачи 3.165). Он попадет в точку C , если за время смещения вдоль линий индукции на расстояние L опишет целое число полных окружностей. Учитывая это, получим

$B = k \cdot 2\pi \frac{mv}{eL} \cos \alpha$, где k — произвольное целое число.

$$\mathbf{3.167.} \quad T = e^2 B^2 (r^2 + R^2) / 2m_p.$$

$$\mathbf{3.168.} \quad T = 3e^2 B^2 r^2 / 4m_p. \text{ Напомним, что масса } \alpha\text{-частицы равна } 4m_p.$$

3.169. Используя второй закон Ньютона $mv^2/R = evB$ и условие синхронизации $2\pi R/v = 1/f$, можем определить отношение заряда частицы q к ее массе m : $\gamma = q/m = 2\pi f/B$. Используя связь тока с числом частиц, пролетающих в единицу времени, $I = nq$, запишем мощность пучка: $N = nmv^2/2 = \pi I B R^2 f$. Условие теплового баланса имеет вид $N = \epsilon M_l \Delta t$, где $c = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ — удельная теплоемкость воды. Отсюда искомое повышение температуры воды $\Delta t = \pi B I R^2 f / c M_l = 5,6 \text{ К}$.

3.170. В установившемся режиме магнитная сила evB , действующая на свободные электроны проводника, компенсируется электрической силой eV/d . Отсюда $v = V/Bd = 2 \text{ м/с}$.

3.171. Полная энергия электрона в атоме $E = mv^2/2 - e^2/4\pi\epsilon_0 r$, где m — масса электрона. Условие вращения электрона по орбите радиуса r : $mv^2/r = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$. Отсюда

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}, \quad E_1 = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_1}; \quad E_2 = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_2} \quad (E_1 < E_2).$$

Энергия фотона

$$E_{\text{ф}} = E_2 - E_1 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж.}$$

3.172. Ионизация произойдет, если полная энергия электрона примет нулевое значение; следовательно (см. решение задачи 3.170), $r = e^2/8\pi\epsilon_0 E = 5,3 \cdot 10^{-9} \text{ см}$.

3.173. Время пролета электронов между электродами лампы $\tau = (2d^2/\gamma V)^{1/2} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ с}$. Усилитель не вносит искажений, если за время движения электрона напряжение практически не меняется. Для этого необходимо, чтобы период входного напряжения T был велик по сравнению со временем пролета электрона τ : $f = 1/T \leq 1/\tau = 4 \cdot 10^9 \text{ Гц}$. Инерционность электронов начнет проявляться на частотах порядка 10^9 Гц .

3.174. Потенциал сетки 3 по условию (рис. 3.83) равен потенциалу сетки 1; следовательно, электрон, разогнанный полем между сетками 1 и 2, при подлете к сетке 3 затормозится, повернет обратно и будет колебаться между сетками 1 и 3 (положительный ион азота будет вытолкнут из пространства между сетками 1 и 3). Так как движение электрона не синусоидально, то он будет излучать целый спектр электромагнитных волн, однако максимальная длина волны в этом спектре будет соответствовать полному периоду колебаний электрона. Если c — скорость электромагнитных волн (скорость света), то $\lambda = cT$. Очевидно, период T в четыре раза больше времени пролета электронов от сетки 1 до сетки 2. Поскольку ускорение и время движения на этом участке

$$a = eV/mL, \quad t = T/4 = (2L/a)^{1/2} = L(2m/eV)^{1/2},$$

то для λ получаем окончательно $\lambda = 4cL(2m/eV)^{1/2} \approx 3,6$ м.

Чтобы ион азота начал двигаться между сетками 1 и 3 и излучать волны с длиной λ , необходимо знак потенциала V_2 изменить на обратный и добиться того, чтобы отношение m_a/qV осталось таким же, как для электрона.

Электромагнитная индукция. Переменный ток

3.175. Предположим, что заряд по цепи гальванометра протекает за промежуток времени Δt . За это время магнитный поток через катушку меняется от $\Phi = BS\sin$ до нуля. По закону Ома $\mathcal{E} = IR$. Согласно закону Фарадея

$$\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t = BS\sin/\Delta t, \quad I = q/\Delta t; \text{ поэтому } B = qR/S\sin.$$

Примечание. В решении предполагалось, что магнитный поток убывает со временем равномерно. Нетрудно, однако, показать, что в действительности результат не зависит от того, по какому закону происходит изменение потока. Предоставляем доказательство этого утверждения читателю.

3.176. При повороте витка в нем возникает э.д.с. индукции \mathcal{E} . На основании закона Фарадея $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$, где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока через плоскость витка, происшедшее за время Δt . С другой стороны, по закону Ома $\mathcal{E} = IR = R\Delta Q/\Delta t$, где ΔQ — заряд, протекший через поперечное сечение провода, из которого сделан виток, за время Δt . Из этих соотношений получаем $\Delta Q = -\Delta\Phi/R$.

В начальный момент, когда плоскость витка была перпендикулярна к линиям индукции магнитного поля, магнитный поток, пронизывающий плоскость витка, был равен $\Phi_1 = BS$. После поворота витка на угол α магнитный поток стал равен $\Phi_2 = BS \cos \alpha$. Следовательно, $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -BS(1 - \cos \alpha)$ и $\cos \alpha = 1 - RQ/BS = -0,5$, $\alpha = 120^\circ$ (см. также примечание к решению задачи 3.175).

3.177. Заряд, протекающий по витку, пропорционален изменению магнитного потока, пронизывающего виток. По условию задачи вначале магнитное поле отсутствовало; следовательно, изменение магнитного потока при включении поля равно просто потоку Φ , пронизывающему виток при включенном поле.

Изменение потока при сложении витка «восьмеркой» зависит от того, каким из трех возможных способов получили «восьмерку» (рис. 3.133). Учитывая, что в перевернутых петлях потоку необходимо приписать противоположный знак, получаем для трех случаев следующие соотношения:

а) виток «пережат» —
 $\Phi_1 = 5\Phi/8, \quad \Delta\Phi_1 = -3\Phi/8,$
 $Q_1 = -3Q/8;$

б) перевернута меньшая петля —
 $\Phi_2 = \Phi/2, \quad \Delta\Phi_2 = -\Phi/2,$
 $Q_2 = -Q/2;$

в) перевернута большая петля —

$$\Phi_3 = -\Phi/2, \quad \Delta\Phi_3 = -3\Phi/2, \quad Q_3 = -3Q/2.$$

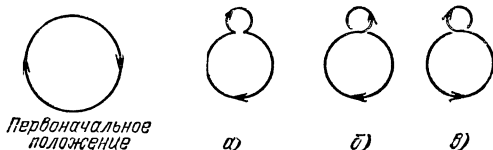


Рис. 3.133.

Знак минус во всех трех случаях показывает, что в неперевернутых частях витка направление протекания заряда противоположно тому, в котором он протекал при включении магнитного поля.

3.178. $q = CS\Delta B/\Delta t = 5 \cdot 10^{-10}$ Кл.

3.179. $N = (\Delta B/\Delta t)^2 S^2 n^2 R = 10^{-7}$ Вт.

3.180. Перемычка ab делит рамку на два контура, причем при движении перемычки изменяется магнитный поток через оба контура и в обоих контурах наводится э.д.с. индукции. Так как магнитный поток через правый контур уменьшается, а через левый увеличивается с одинаковой скоростью, то э.д.с. индукции равны по модулю и имеют разные знаки по отношению к заданному направлению обхода контуров (рис.3.134): $|\mathcal{E}_1| = |\mathcal{E}_2| = \Delta\Phi/\Delta t$. Поскольку магнитное поле постоянно, изменение магнитного потока $\Delta\Phi = B\Delta S = BL\Delta x$. Итак, $|\mathcal{E}_1| = |\mathcal{E}_2| = BL\Delta x/\Delta t = BLv$, где v — скорость движения перемычки. Для тока получаем два совпадающих уравнения: $I = |\mathcal{E}_1|/R_1 = |\mathcal{E}_2|/R_2 = BLv/R$.

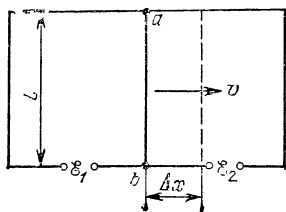


Рис. 3.134.

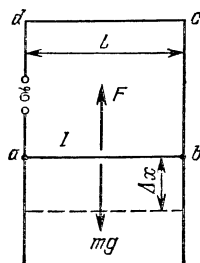


Рис. 3.135.

3.181. Перемычка ab движется вниз с постоянной скоростью; следовательно, сила тяжести уравновешена силой, действующей на перемычку со стороны магнитного поля: $mg = F$ (рис. 3.135). Определим силу F . При движении перемычки в контуре $abcd$ наводится э.д.с. индукции $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$. Мощность тепловых потерь $N = \mathcal{E}^2/R$. Согласно закону сохранения энергии $N = Fv$, или $F = \mathcal{E}^2/Rv$. Но $\mathcal{E} = -BL\Delta x/\Delta t = -BvL$. Решая систему уравнений, получаем $R = B^2 L^2 v/mg = 2,55 \cdot 10^{-3}$ Ом.

3.182. $F = B^2 l^2 v/R = 2 \cdot 10^{-12}$ Н.

3.183. В установившемся режиме горизонтальная составляющая скорости равна начальной скорости v_0 , а вертикальная составляющая v_v может быть найдена из условия равенства силы тяжести mg и магнитной силы F . При движении рамки в ней возникает э.д.с. индукции $\mathcal{E} = kv_v a^2$, и вследствие этого

течет ток $I = \mathcal{E}/R$. Сила F возникает благодаря различию в значениях магнитной индукции вблизи верхней и нижней сторон рамки:

$$F = Ia [(B_0 + kz + ka) - (B_0 + kz)].$$

Из полученных уравнений найдем вертикальную составляющую скорости: $v_v = mgR/k^2 a^4$. Искомая начальная скорость

$$v_0 = [v^2 - (mgR/k^2 a^4)^2]^{1/2}.$$

3.184. Запишем закон Ома для цепи соленоида: $-L\Delta I/\Delta t = IR$, где I — ток в соленоиде, ΔI — изменение этого тока за время Δt . Так как индукция магнитного поля в соленоиде пропорциональна току, то и изменения этих величин за одно и то же время оказываются пропорциональными:

$$B = \alpha I, \quad \Delta B = \alpha \Delta I, \quad \Delta B/B = \Delta I/I.$$

Поэтому

$$R = -L\Delta I/I \Delta t = -L \Delta B/B \Delta t = 5,6 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}.$$

При подстановке числовых данных было принято во внимание, что относительное изменение магнитного поля за время $\Delta t = 3600$ с $\Delta B/B = -2 \cdot 10^{-2}$. Знак минус указывает на уменьшение индукции поля.

3.185. Через резистор R ток течет только в процессе установления, когда меняется ток I_1 в индуктивности L . В этот период времени на катушке, а следовательно и на резисторе, имеется напряжение, равное э.д.с. индукции $\mathcal{E}_1 = -L\Delta I_1/\Delta t$. Ток I_2 через резистор R есть заряд, протекающий через него в единицу времени: $\Delta q/\Delta t = I_2 = \mathcal{E}_1/R$. Получаем соотношение $R\Delta q = -L\Delta I_1$. Ток I_1 изменяется за время установления от нуля до \mathcal{E}/r . Следовательно, искомый заряд $q = -L\mathcal{E}/Rr$ (см. также примечание к решению задачи 3.175).

3.186. После замыкания ключа K_2 э.д.с. индукции на катушках должны быть равны:

$$L_1 \Delta I_1/\Delta t = L_2 \Delta I_2/\Delta t, \quad \text{или} \quad \Delta I_1 = (L_2/L_1) \Delta I_2.$$

Начальные значения токов в момент замыкания ключа K_2 есть $I_1 = I_0$, $I_2 = 0$. Следовательно, после замыкания ключа выполняется соотношение $I_1 - I_0 = (L_2/L_1) I_2$. В установившемся режиме, кроме того, $I_1 + I_2 = \mathcal{E}/r$. Решая совместно два последних уравнения, получаем установившиеся токи:

$$I_1 = (L_2 \mathcal{E}/r + L_1 I_0)/(L_1 + L_2), \quad I_2 = (L_1 \mathcal{E}/r - L_1 I_0)/(L_1 + L_2).$$

3.187. $I_0 = \mathcal{E}/3r$.

3.188. По аналогии с решением задачи 3.186, можно получить $L_1 I_1 = L_2 I_2$. Для каждого момента времени выполняется такое же соотношение между зарядами, протекшими через катушки: $L_1 q_1 = L_2 q_2$. К моменту окончания перезарядки полный протекший по цепи заряд равен $2CV$, т. е. $q_1 + q_2 = 2CV$. Следовательно, искомые заряды

$$q_1 = 2CV L_2/(L_1 + L_2), \quad q_2 = 2CV L_1/(L_1 + L_2).$$

3.189. В момент, когда токи через катушки достигают максимума, вся энергия, ранее запасенная в конденсаторе, переходит в энергию магнитного поля токов: $L_1 I_1^2/2 + L_2 I_2^2/2 = q^2/2C$. Используя связь между токами (см. решение задачи 3.186) $L_1 I_1 = L_2 I_2$, получаем $q = I_1 [CL_1 (L_1 + L_2)/L_2]^{1/2}$.

3.190. Из закона сохранения энергии найдем ток, протекающий через катушку 1 в момент замыкания ключа K_2 (в этот момент он максимален):

$I_1^0 = V_0 \sqrt{C/L}$. Токи через катушки 1 и 2 связаны соотношением $I_1 - I_2 = I_1^0$. Когда ток через катушку 1 примет нулевое значение, ток через катушку 2 $I_2^0 = -I_1^0$; в силу закона сохранения энергии это — его максимальное (по модулю) значение. При этом энергия конденсатора равна нулю. Значит, она должна быть максимальной в середине промежутка времени между этими моментами. Для этого момента запишем закон сохранения энергии: $LI^2 + CV_{\max}^2/2 = CV_0^2/2$, причем из соотношения между токами в катушках получаем $I = I_1^0/2$. Окончательно имеем $V_{\max} = V_0/\sqrt{2}$.

К тому же выводу можно прийти, если записать в явном виде выражение для токов через катушки, продифференцировать по времени выражение для энергии конденсатора и приравнять производную нулю.

3.191. $I_{\max} = V_0 \sqrt{C/L_1}$, $I_{\min} = (L_1 - L_2) V_0 \sqrt{C/L_1} / (L_1 + L_2)$.

3.192. В установившемся режиме ток через катушку $I = \mathcal{E}/r$, а напряжение на конденсаторе равно нулю. Напряжение на конденсаторе при колебаниях будет достигать амплитудного значения, когда вся энергия катушки $LI^2/2$ перейдет в энергию конденсатора $C(n\mathcal{E})^2/2$. Используя формулу для периода колебаний $T = 2\pi \sqrt{LC}$, получаем $C = T/2\pi rn$, $L = nrT/2\pi$.

3.193. В установившемся режиме ток через катушку $I = \mathcal{E}/R$, а напряжение на конденсаторе равно \mathcal{E} . После размыкания ключа в виде тепла выделится вся запасенная в колебательном контуре энергия: $Q = E = LI^2/2 + C\mathcal{E}^2/2 = \mathcal{E}^2 (CR^2 + L)/2R^2$.

3.194. Так как процесс перезарядки происходит медленно, потерями энергии на электромагнитное излучение можно пренебречь. Потерь на тепло тоже нет. Следовательно, электрическая энергия, запасенная в конденсаторе C_1 , должна сохраняться: $C_1 V_0^2/2 = C_1 V_1^2/2 + C_2 V_2^2/2$. Кроме того, сохраняется заряд: $C_1 V_0 = C_1 V_1 + C_2 V_2$. Решая эту систему уравнений, находим, что конденсатор C_2 заряжается до разности потенциалов $V_2 = 2C_1 V_0 / (C_1 + C_2) = 200$ В. Результат не зависит от индуктивности L . Она нужна в цепи для обеспечения медленной перезарядки, когда можно пренебречь потерями на электромагнитное излучение.

3.195. Так как потери в цепи отсутствуют (см. решение задачи 3.194), работа батареи целиком идет на увеличение энергии конденсатора. Обозначим через q заряд, протекший через батарею. Тогда на основании закона сохранения энергии имеем

$$\mathcal{E}q = (q + q_0)^2/2C - q_0^2/2C, \text{ или } 2C\mathcal{E}q = q^2 + 2q_0q.$$

В этих соотношениях произведение $\mathcal{E}q$ есть работа батареи при протекании заряда q . Таким образом, $q = 2(C\mathcal{E} - q_0)$. Конденсатор при этом заряжается до разности потенциалов $V = (q + q_0)/C = 2\mathcal{E} - q_0/C$.

3.196. При замкнутом ключе ток через диод не течет, конденсатор остается незаряженным. В то же время э. д. с. индукции равна э. д. с. батареи, ток через катушку линейно растет со временем и к моменту размыкания ключа достигает значения $I = \mathcal{E}\tau/L$. После размыкания ключа в контуре начинаются колебания с периодом $T = 2\pi \sqrt{LC}$, но когда напряжение на конденсаторе достигает максимального значения $V_0 = \mathcal{E}\tau/\sqrt{LC}$ (его можно получить из закона сохранения энергии), диод запирается, и

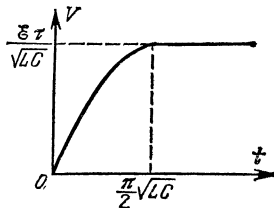


Рис. 3.136.

далее напряжение остается постоянным. Итак (рис. 3.136),

$$V = \frac{\mathcal{E}\tau}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad t \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{LC}; \quad V = \frac{\mathcal{E}\tau}{\sqrt{LC}}, \quad t \geq \frac{\pi}{2} \sqrt{LC}.$$

3.197. При замыкании ключа в контуре LC начинается колебательный процесс. Равновесию при этом соответствует напряжение на конденсаторе $V_C = \mathcal{E}$. Так как в начальный момент $V_C = 0$, то амплитуда напряжения равна \mathcal{E} и максимальное напряжение на конденсаторе равно $2\mathcal{E}$.

Если $2\mathcal{E} < \mathcal{E}'_0$, диод заперт, в контуре происходят гармонические колебания (штриховая кривая на рис. 3.137), а через батарею \mathcal{E}_0 заряд не протекает.

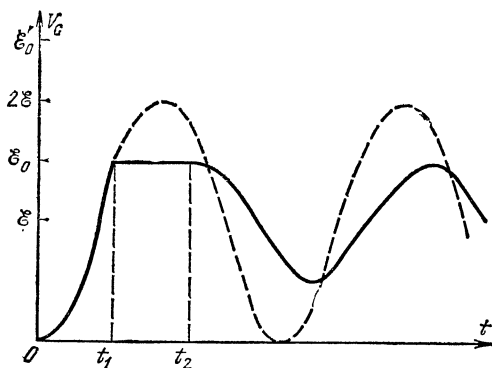


Рис. 3.137.

Если $2\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$, диод в некоторый момент времени t_1 , когда $V_C = \mathcal{E}_0$, откроется и через батарею \mathcal{E}_0 потечет ток. Так как сопротивление диода в открытом состоянии равно нулю и на нем нет падения напряжения, то в течение всего времени протекания тока через батарею \mathcal{E}_0 напряжение на конденсаторе равно \mathcal{E}_0 (сплошная кривая на рис. 3.137). Следовательно, к моменту времени t_2 , когда диод закрывается, заряд на конденса-

торе равен $C\mathcal{E}_0$. Если при этом через батарею \mathcal{E}_0 протек заряд q_0 , то всего батарея \mathcal{E} отдала в цепь заряд $q = q_0 + C\mathcal{E}_0$. Работа батареи \mathcal{E} пошла на сообщение энергии конденсатору и на работу против э. д. с. батареи \mathcal{E}_0 .

До момента запираания диода ток через катушку индуктивности шел слева направо (рис. 3.99). После закрытия диода начинает разряжаться конденсатор и ток через индуктивность идет справа налево. В момент времени t_2 ток через индуктивность L меняет знак, а значит, он равен нулю. Поэтому равна нулю запасенная в катушке энергия. Итак, закон сохранения энергии для момента времени t_2 выглядит следующим образом: $q\mathcal{E} = q_0\mathcal{E}_0 + C\mathcal{E}_0^2/2$. Решая совместно два полученных уравнения, имеем $q_0 = C\mathcal{E}_0(2\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)/2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E})$. После закрытия диода в контуре будут проходить колебания с амплитудой $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}$.

3.198. При синусоидальной зависимости тока от времени магнитный поток и скорость его изменения (если иметь в виду максимальные или средние по модулю значения за период) связаны прямой пропорциональной зависимостью. Поэтому э. д. с. индукции в этом случае пропорциональна магнитному потоку и, следовательно, пропорциональна току в возбуждающей катушке или напряжению на ней.

Катушка 1 создает магнитный поток $\Phi = kV_1$, где $V_1 = 40$ В, а k — некоторый коэффициент пропорциональности. Половина этого потока проходит через катушку 2 и возбуждает там напряжение V . Если теперь мы подведем к катушке 2 напряжение V , она создаст поток $\Phi/2 = kV_1/2$. Из этого потока в силу симметричности сердечника половина, т. е. $kV_1/4$, пойдет через катушку 1. Следовательно, в первой катушке возбудится напряжение $V_2 = V_1/4 = 10$ В.

3.199. Если весь поток, создаваемый одной из катушек, проходит через вторую катушку, то выполняется соотношение $V_1/V_2 = n_1/n_2$, где n_1 и n_2 — числа витков катушек 1 и 2. Так как в нашем сердечнике лишь некоторая часть потока проходит через вторую катушку, то эта пропорция несколько видоизменяется, а именно, напряжение, возбуждаемое в катушке, не подключенной к сети, будет меньше во столько раз, во сколько раз часть потока, пронизывающая ее, меньше всего потока, создаваемого другой катушкой.

В первом случае (к сети подключена катушка 1) $V_2/V = k_1 n_2/n_1$. Во втором случае (к сети подключена катушка 2) $V_1/V = k_2 n_1/n_2$. Но по условию задачи сердечник симметричен; следовательно, $k_1 = k_2$. Учитывая это условие, находим $V_2/V_1 = n_2^2/n_1^2$ и окончательно $n_1/n_2 = \sqrt{V_1/V_2} = 3$.

3.200. В рассматриваемой электрической цепи (рис. 3.138) действует э. д. с. батареи \mathcal{E} и э. д. с. индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}}$, возникающая при вращении якоря и направленная навстречу э. д. с. батареи \mathcal{E} . Следовательно, для этой цепи закон Ома примет вид $\mathcal{E} = IR + \mathcal{E}_{\text{инд}}$, где R — сопротивление цепи, слагаемое из сопротивления соединительных проводов, обмоток якоря мотора, батареи и т. д. Когда якорь неподвижен, $\mathcal{E}_{\text{инд}} = 0$ и $\mathcal{E} = IR$; отсюда $\mathcal{E} = \mathcal{E}I/I_0 + \mathcal{E}_{\text{инд}}$. Умножая обе части этого равенства на ток I , получим $\mathcal{E}I = \mathcal{E}^2 I^2/I_0 + I\mathcal{E}_{\text{инд}}$. Левая часть этого равенства является не чем иным, как полной мощностью, расходуемой батареей. Первый член справа дает мощность тепловых потерь, а $N = I\mathcal{E}_{\text{инд}}$ — полезная мощность мотора. Следовательно, $N = \mathcal{E}I - \mathcal{E}^2 I^2/I_0 = 8$ Вт.

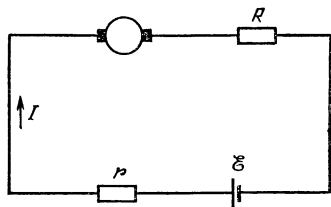


Рис. 3.138.

3.201. Закон Ома для цепи, состоящей из источника с э. д. с. \mathcal{E} и электромотора постоянного тока, имеет вид (см. решение задачи 3.200) $\mathcal{E} = IR + \mathcal{E}_{\text{инд}}$, где R — сопротивление цепи, $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ — э. д. с. индукции якоря мотора. Когда якорь неподвижен, $\mathcal{E}_{\text{инд}} = 0$ и $\mathcal{E} = I_0 R$. Мощность, расходуемая источником, питающим мотор в установившемся режиме, $N_1 = \mathcal{E}I$, а полезная мощность $N_2 = \mathcal{E}_{\text{инд}}I$; следовательно, $\eta = \mathcal{E}_{\text{инд}}/\mathcal{E} = 1 - I/I_0 = 0,4$, т. е. 40 %.

3.202. Поскольку тепловыми потерями можно пренебречь (см. решение задачи 3.200), полезная мощность электровоза $N = Fv = \mathcal{E}_{\text{инд}}I = VI$, откуда $I = Fv/V = 980$ А.

3.203. Закон сохранения энергии для генератора запишется в виде $N = \mathcal{E}^2/R + \alpha N$, где \mathcal{E} — э. д. с. индукции, развиваемая машиной. Из этого уравнения находим $\mathcal{E} = [NR(1 - \alpha)]^{1/2} = 120$ В. Согласно условию при изменении нагрузки число оборотов поддерживается прежним. Поскольку э. д. с. зависит только от скорости изменения магнитного потока, пронизывающего обмотку якоря, то при постоянном числе оборотов э. д. с. индукции постоянна. На основании закона сохранения энергии имеем $N_1 = \mathcal{E}^2/R_1 + \alpha N_1 = NR/R_1 = 250$ Вт.

3.204. $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0 - IR) n_2/n_1 = 46,7$ В.

3.205. Сопротивление паяльника $R = V^2/N$. При включении его в сеть переменного тока с напряжением $V_1 = 220$ В без диода в нем выделялась бы мощность $N_1 = V_1^2/R = V_1^2 N/V^2 = 150$ Вт. При включении паяльника в сеть с диодом через него в течение одного полупериода будет протекать ток такой же,

параллельной пластинке (рис. 4.57). При наведении микроскопа с верхней царпины на нижнюю его тубус следует передвинуть на расстояние $l = BA_1$. Из треугольников ABC и A_1BC получим $\operatorname{tg} i / \operatorname{tg} r = d/l$. По условию в объектив микроскопа попадают лишь лучи, наклоненные к оси микроскопа под достаточно малыми углами. Для таких лучей можно приближенно принять $\operatorname{tg} i / \operatorname{tg} r \approx \sin i / \sin r = n$. Таким образом, $n \approx d/l = 1,5$.

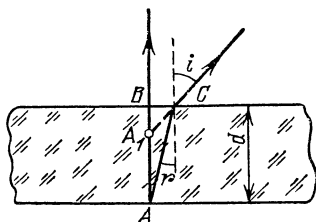


Рис. 4.57.

Примечание. Из решения вытекает, что положение точки A_1 не зависит от углов i и r только при достаточно малых углах. Таким образом, изображение нижней царпины в микроскопе будет резким лишь в том случае, когда условие малости углов отклонения будет выполнено для всех лучей, попадающих в объектив.

4.3. Палка будет казаться прямой наблюдателю, смотрящему вдоль ее надводной части, если направление подводной части совпадает с направлением преломленного луча (рис. 4.58). Угол излома $\beta = i - r$, причем $\sin i / \sin r = n$. Отсюда получаем $\beta = \pi/2 - \alpha - \arcsin(\cos \alpha / n)$.

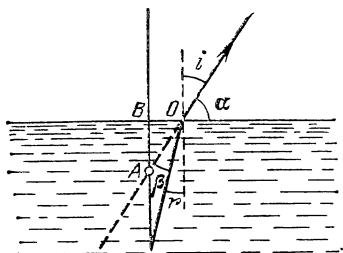


Рис. 4.58.

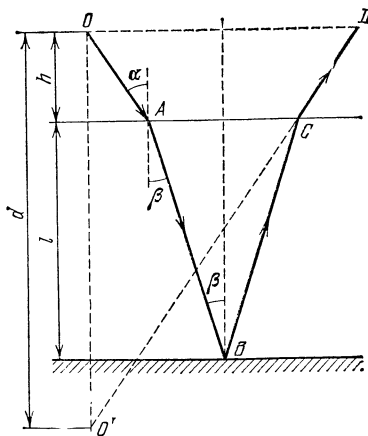


Рис. 4.59.

4.4. Проследим за некоторым лучом $OABCD$, выходящим из глаза и после отражения от зеркала снова попадающим в глаз (рис. 4.59). Углы α и β малы, так что $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ и $\sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta \approx \beta$. Глаз увидит изображение точки O в точке O' , лежащей на продолжении луча CD . Из рис. 4.59 видно, что $OD \approx \alpha d \approx 2\alpha h + 2\beta l \approx 2\alpha(h + l/n)$. При написании последнего равенства был принят во внимание закон преломления: $\sin \alpha / \sin \beta \approx \alpha / \beta = n$. Таким образом, глубина сосуда $l \approx (d - 2h) n/2 = 10$ см.

4.5. По закону преломления $\sin \alpha / \sin \beta = n = c/v$. По условию задачи $\alpha + \beta = \pi/2$; следовательно, $\sin \beta = \cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha = c/v = 1,5$; $\alpha = \arctg 1,5 \approx 56^\circ$.

4.6. Появление темной полосы на экране следует из построения, приведенного на рис. 4.60. Пучок параллельных лучей, падающий на призму, разделяется на два пучка, каждый из которых отклоняется на некоторый угол φ по отношению к направлению падающего пучка (каждый пучок изображен на рис. 4.60 своей штриховкой). Найдем сначала связь между углом преломле-

ния призмы α и углом отклонения лучей φ . Для этого достаточно рассмотреть преломление лучей на второй поверхности призмы. Угол падения лучей на эту поверхность равен α , угол преломления равен $\alpha + \varphi$; следовательно, $\sin \alpha / \sin (\alpha + \varphi) = 1/n$. Как видно из рис. 4.60, $\operatorname{tg} \varphi \approx (a+d)/L = 3 \cdot 10^{-2}$. Угол φ оказался малым. Так как по условию угол α тоже мал, заменим синусы и тангенсы углов самими углами: $\alpha/(\alpha + \varphi) = 1/n$, $\alpha = \varphi/(n-1) = 3^\circ$.

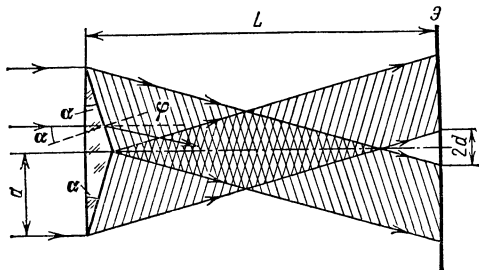


Рис. 4.60.

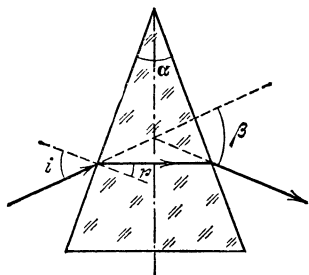


Рис. 4.61.

4.7. Если i — угол падения луча на боковую грань призмы, r — угол преломления (рис. 4.61), то отклонение луча при преломлении на одной грани $\beta/2 = i - r$. Так как луч в призме распространяется параллельно основанию, то $r = \alpha/2$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами), т. е. $r = 15^\circ$. По закону преломления $\sin i = n \sin r$. Подставляя r , находим $i = 31^\circ$. Итак, $\beta = 2(i - r) \approx 32^\circ$.

4.8. Из решения задачи 4.7 следует, что $r = \alpha/2$, а $i = \beta/2 + r = (\alpha + \beta)/2$. По закону преломления $n = \sin [(\alpha + \beta)/2] / \sin (\alpha/2)$.

4.9. Угол падения луча на вторую грань призмы при первом попадании луча равен α , при втором 3α , при m -м $\alpha_m = (2m-1)\alpha$ (рис. 4.62). Лучи будут выходить из призмы, если угол падения меньше угла полного внутреннего отражения, который находится из условия $\sin \alpha_0 = 1/n$, откуда $\alpha_0 = 45^\circ$.

$\alpha_1 = 10^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $\alpha_3 = 50^\circ$. Таким образом, $\alpha_3 > \alpha_0$, т. е. третий луч претерпевает полное внутреннее отражение. Итак, из призмы выйдут только два луча.

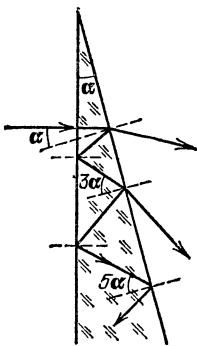


Рис. 4.62.

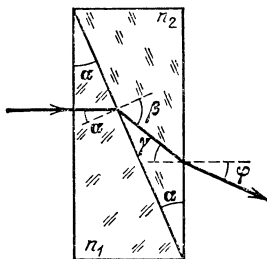


Рис. 4.63.

4.10. По закону преломления на границе между призмами имеем (рис. 4.63) $\sin \alpha / \sin \beta = n_2/n_1$. Угол падения на вторую грань призмы с показателем преломления n_2 равен $\gamma = \beta - \alpha$. По закону преломления $\sin \varphi / \sin \gamma = n_2$. Разность

показателей преломления призм

$$\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{\sin \varphi}{\sin(\beta - \alpha)} \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - 1 \right).$$

Учитывая малость углов, получаем $\Delta n \approx \varphi/\alpha$.

4.11. Из рис. 4.64 видим, что угол падения луча на боковую грань $i = \alpha$, угол падения на основание $\beta = 90^\circ - (\alpha - r)$. По закону преломления $\sin \alpha / \sin r = n$. Покажем, что $\sin \beta \geq 1/n$:

$$\begin{aligned} \sin \beta = \cos(\alpha - r) &= \cos \alpha \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2} \right)^{1/2} + \frac{\sin^2 \alpha}{n} = \\ &= \frac{1}{n} [\cos \alpha (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2} + \sin^2 \alpha]. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках равно 1 при $n=1$ и больше 1 при $n > 1$. Следовательно, мы доказали, что $\sin \beta \geq 1/n$, т. е. в точке A имеет место полное внутреннее отражение.

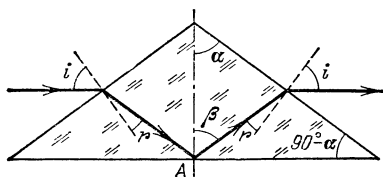


Рис. 4.64.

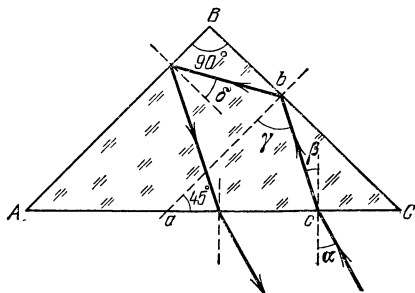


Рис. 4.65.

4.12. На гранях AB и BC происходит полное внутреннее отражение, поэтому (рис. 4.65) имеем $\sin \gamma \geq 1/n$ и $\sin \delta \geq 1/n$; кроме того, $\gamma + \delta = 90^\circ$. Так как $n=2$, то

$$\sin \gamma \geq 1/2, \gamma \geq 30^\circ; \quad \sin \delta = \cos \gamma \geq 1/2, \gamma \leq 60^\circ.$$

Рассмотрим треугольник abc ($ab \perp BC$): $45^\circ + \gamma + 90^\circ - \beta = 180^\circ$, откуда $\beta = \gamma - 45^\circ$, т. е. $\beta \leq 15^\circ$. Итак, $\beta_{\text{max}} = 15^\circ$; по закону преломления

$$\sin \alpha_{\text{max}} = n \sin \beta_{\text{max}} = 0,516, \quad \alpha_{\text{max}} = 31^\circ.$$

4.13. Необходима такая длина основания, чтобы верхний луч пучка из точки B попадал в самую дальнюю точку основания C (рис. 4.66). При этом $\alpha = 45^\circ$, а $\sin \beta = \sin \alpha / n = 1/2$, откуда $\beta = 30^\circ$. Из треугольника BDC имеем $y = h \operatorname{tg} 75^\circ = 7,9$ см, $x = h \operatorname{tg} 45^\circ = 2,1$ см. Итак, минимальная длина основания AC равна $l = x + y = 10$ см.

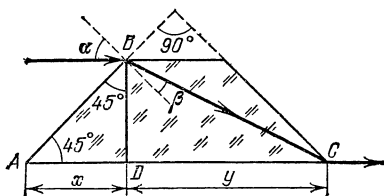


Рис. 4.66.

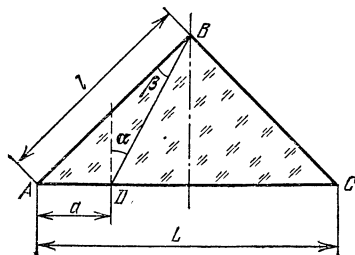


Рис. 4.67.

4.14. Из-за полного внутреннего отражения не будет виден участок AD , если $\sin \alpha = 1/n$ (рис. 4.67); при этом $\beta = 45^\circ - \alpha$. Из треугольника ABD по теореме синусов имеем $a/\sin \beta = l/\sin(90^\circ + \alpha)$, откуда

$$\frac{a}{l} = \frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \right),$$

$$l = \frac{L}{\sqrt{2}}, \quad 1 - k = \frac{a}{L} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \right).$$

Окончательно получаем $n = [(2k - 1)^2 + 1]^{1/2} / (1 - 2k) = 1,5$.

4.15. Пучки для разных длин волн перестают перекрываться (рис. 4.68), выходя из пластины, если $d \tan \beta_1 + a/\cos \alpha = d \tan \beta_2$. Из закона преломления $\sin \beta_1 = \sin \alpha/n_1$, $\sin \beta_2 = \sin \alpha/n_2$; следовательно,

$$\tan \beta_1 = \frac{\sin \alpha}{n_1} \left[1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n_1} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad \tan \beta_2 = \frac{\sin \alpha}{n_2} \left[1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n_2} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

$$d \geq \frac{2a}{\sin 2\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \alpha}} \right)^{-1}.$$

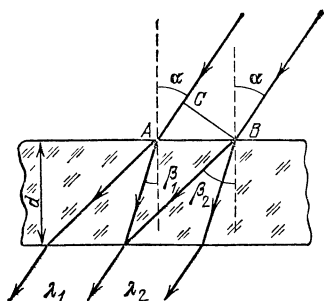


Рис. 4.68.

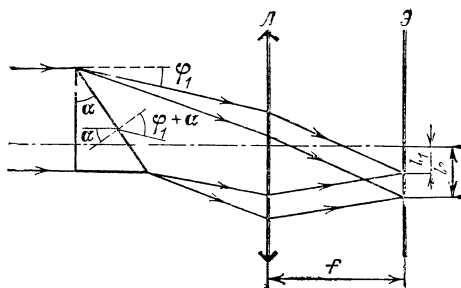


Рис. 4.69.

4.16. Рассмотрим сначала ход лучей с длиной волны λ_1 (рис. 4.69). На передней грани лучи не преломляются. Для преломления на задней грани можно записать $n_1 \alpha = \varphi_1 + \alpha$. Отсюда определяем угол отклонения лучей от первоначального направления: $\varphi_1 = \alpha(n_1 - 1)$. Очевидно, что φ_1 есть угол между направлением преломленных лучей и оптической осью линзы. На экране лучи соберутся в точке, отстоящей от оптической оси на расстоянии $l_1 \approx \varphi_1 f = \alpha(n_1 - 1)f$. Повторим те же рассуждения для лучей с длиной волны λ_2 : $l_2 \approx \varphi_2 f = \alpha(n_2 - 1)f$. Вычитая полученные уравнения, находим $n_1 - n_2 = l/\alpha f$.

4.17. Так как для компоненты λ_1 происходит полное внутреннее отражение, а для λ_2 — нет, можно написать

$$\frac{1}{n_1} < \sin \alpha < \frac{1}{n_2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{1 + a/\lambda_1^2} < \sin \alpha < \frac{1}{1 + a/\lambda_2^2},$$

откуда $0,5 < \sin \alpha < 0,526$, $30^\circ < \alpha < 31^\circ 45'$.

4.18. Рассмотрим преломление света в некоторой точке a , расположенной на грани AC (рис. 4.70). Эта грань по условию задачи освещается лучами всевозможных направлений (рассеянный свет). Так как стеклянная призма представляет собой оптически более плотную среду по сравнению с воздухом, угол преломления не может быть больше некоторого предельного угла θ_0 ,

определяемого соотношением $\sin r_0 = 1/n$. Крайние лучи светового конуса, исходящего из точки a , будут падать на грань AB под углами $r'_0 = r_0 - \alpha$ и $r''_0 = r_0 + \alpha$ в точках b и e . Заметим, что $r'_0 < r_0$, а $r''_0 > r_0$; это означает, что луч ab не испытывает полного внутреннего отражения на границе стекло—воздух, в то время как луч ae полностью отразится. Угол преломления i_0 луча, выходящего из призмы в точке b , найдется из соотношения $\sin r'_0 / \sin i_0 = 1/n$, или

$$\frac{\sin(r_0 - \alpha)}{\sin i_0} = - \frac{\sin \alpha \cos r_0 - \cos \alpha \sin r_0}{\sin i_0} = - \frac{\sin \alpha \sqrt{1 - 1/n^2} - \cos \alpha}{\sin i_0} = \frac{1}{n}.$$

Отсюда получим

$$n = \sqrt{(\sin i_0 / \sin \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 + 1}.$$

Все лучи, выходящие из призмы под углом i_0 , соберутся в некоторой точке фокальной плоскости линзы (точке D на рис. 4.9), направление на которую из центра линзы составляет угол i_0 с оптической осью. Выше точки D свет попасть не может (неосвещенная область), так как лучи, выходящие из призмы, не могут быть отклонены вверх от оптической оси на угол, больший, чем i_0 . Ниже точки D располагается освещенная область; угол отклонения лучей от оптической оси вниз может быть любым в интервале от 0 до 90° (например,

в точке d на рис. 4.70 выходящий из призмы луч отклонен на 90° вниз от оптической оси). В нашем случае $\alpha = 30^\circ$, $i_0 = 30^\circ$ и, следовательно, $n = [(1 - \sqrt{3})^2 + 1]^{1/2} \approx 1,24$.

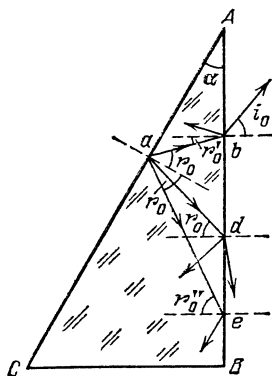


Рис. 4.70.

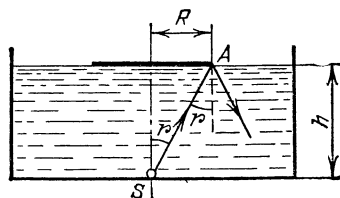


Рис. 4.71.

4.19. Ни один луч не выйдет через поверхность воды, если луч SA (рис. 4.71) испытывает полное внутреннее отражение на границе вода—воздух. Запишем условие полного внутреннего отражения для луча SA :

$$\sin r = \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} \geq \frac{1}{n}, \text{ откуда } R \geq \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

4.20. Лампочку нельзя увидеть сквозь боковые стенки сосуда в том случае, когда все лучи, падающие на эти стенки, испытывают полное внутреннее отражение. Условие полного внутреннего отражения на боковой стенке имеет вид $\sin r' \geq 1/n$, где n — показатель преломления жидкости, а r' — угол падения луча на боковую стенку (рис. 4.72). Рассмотрим теперь лучи от источника S , проникающие в жидкость через дно сосуда. Поскольку жидкость по сравнению с воздухом является средой оптически более плотной, угол преломления лучей r не может быть больше некоторого предельного угла r_0 , соответствующего

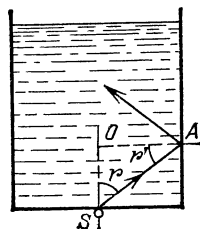


Рис. 4.72.

щего скользящему падению луча от источника на дно сосуда. Предельный угол r_0 определится из условия $\sin r_0 = 1/n$. Из треугольника SOA следует, что $r' = 90^\circ - r_0$.

Предельному углу r_0 соответствует минимальный угол падения лучей на боковую грань $r'_0 = 90^\circ - r_0$. Если условие полного внутреннего отражения на боковой грани будет выполнено для $r' = r'_0 = 90^\circ - r_0$ (предельный луч), то оно, конечно, будет выполнено и для всех других лучей. Таким образом, решение задачи запишется в виде

$$\sin r'_0 = \cos r_0 = \sqrt{1 - \sin^2 r_0} = \sqrt{1 - 1/n^2} \geq 1/n.$$

Отсюда следует $n \geq \sqrt{2} \approx 1,41$, $n_{\min} \approx 1,41$.

Примечание. При решении задачи стеклянные стенки сосуда между жидкостью и воздухом не принимались во внимание, так как условия преломления света на границе двух сред не зависят от наличия прослойки, если не происходит полного отражения на внутренней поверхности прослойки.

4.21. Учитывая, что внутри световода могут распространяться лишь те лучи, которые испытывают полное внутреннее отражение на стенках, получаем $D = 2L \sqrt{(n^2 - 1)/(2 - n^2)} \approx 8,9$ см.

4.22. $\varphi_{\max} = \arcsin \sqrt{n^2 - 1} \approx 90^\circ$.

4.23. Луч, падающий под максимальным углом, должен коснуться поверхности фотокатода. Для упрощения решения будем рассматривать не многократные отражения между зеркалами, а прохождение луча через систему зеркал (рис. 4.73). Из треугольника AOC найдем радиус цилиндрической поверхности фотокатода:

$$L + r = \frac{d}{2 \sin(\alpha/2)}, \quad r = \frac{d}{2 \sin(\alpha/2)} - L.$$

Из треугольника ABO имеем

$$\sin \beta = \frac{r}{L+r} = 1 - \frac{2L}{d} \sin(\alpha/2) \approx 0,5, \quad \text{откуда } \beta = 30^\circ.$$

Итак, $\varphi_{\max} = \beta + \alpha/2 = 36^\circ$.

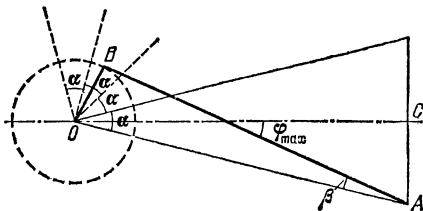


Рис. 4.73.

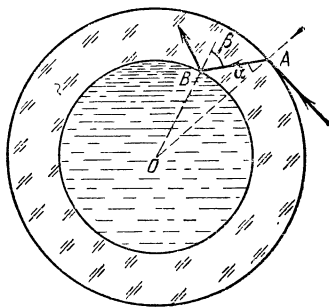


Рис. 4.74.

4.24. Луч, скользящий по наружной поверхности, входит в стекло под углом α таким (рис. 4.74), что $\sin \alpha = 1/n_{\text{ст}}$. Этот луч падает на внутреннюю стенку, если $\beta \leq 90^\circ$, т. е. $\sin \alpha \leq r/R$, или $r/R \geq 1/n_{\text{ст}}$. Он попадет в жидкость, если $\sin \beta \leq n/n_{\text{ст}}$. Из треугольника AOB находим, что $\sin \alpha / \sin \beta = r/R$. Используя выражения для $\sin \alpha$ и $\sin \beta$, получаем $r/R \geq 1/n$. Так как $n < n_{\text{ст}}$, то это условие более сильное, чем $r/R \geq 1/n_{\text{ст}}$. Оно и является решением задачи.

4.25. $\varphi_{\max} = \arcsin(r/R) = 30^\circ$.

4.26. Рассматривая рыбку как источник, находящийся в точке A , построим его изображение (точка B на рис. 4.75). Искомое расстояние $x = AB$. Принимая во внимание, что в глаз попадает узкий пучок лучей и, следовательно, углы i , r и φ малы, запишем $h = x\varphi = x(2r - i)$. С другой стороны, $h = R\alpha \approx 2R(i - r)$, откуда $x = 2R(i - r)/(2r - i) = 2R(n - 1)/(2 - n)$. Подставляя $n = 4/3$, получим $x = R$.

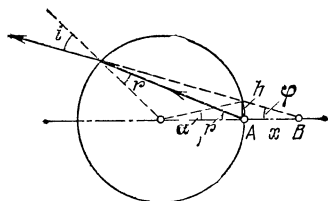


Рис. 4.75.

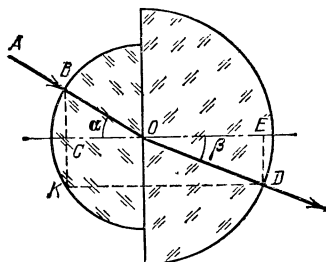


Рис. 4.76.

4.27. Пусть ломаная линия BOD изображает искомый ход луча (рис. 4.76), r и R — радиусы малого и большого шаров. Рассматривая треугольники BOC и OED , находим $BC = r \sin \alpha$, $DE = R \sin \beta$. Учитывая, что $\sin \alpha / \sin \beta = n_2 / n_1 = R/r$, имеем $BC = DE$. Ход луча AB , следовательно, можно построить так: опускаем из точки B перпендикуляр на прямую CE и продолжаем его до пересечения со сферой (точка K). Через эту точку проводим прямую $KD \parallel CE$ до пересечения со второй сферой (точка D). Соединяя точки D и O , получаем направление выходящего луча.

4.28. Из-за полного внутреннего отражения из шара выйдут лучи, падающие на поверхность под углом, меньшим или равным $\alpha = \arcsin(1/n) = 45^\circ$. Построим предельный луч, падающий под углом α (рис. 4.77). Из треугольника OAB находим $a = r / \cos \alpha$. Тогда $b = L - a = L - r / \cos \alpha$. Так как $\alpha = 45^\circ$, имеем $R = b = L - r / \cos \alpha = 2\text{ см}$.

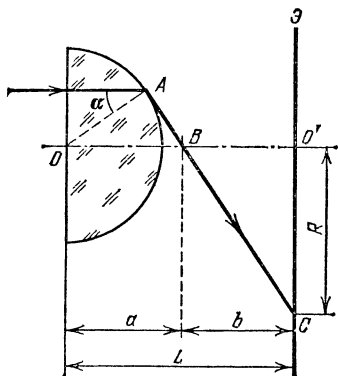


Рис. 4.77.

4.29. Учитывая, что луч при преломлении дважды отклоняется на угол α , так что $\varphi = 2\alpha$, а максимальное отклонение будет претерпевать скользкий луч, находим $n = \sin 90^\circ / \sin 45^\circ = 1,41$.

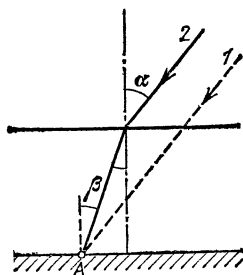


Рис. 4.78.

4.30. В отсутствие атмосферы луч от звезды падал бы к наблюдателю под углом α (луч 1 на рис. 4.78). Из-за преломления в атмосфере (считаем ее

плоскопараллельной пластинкой с показателем преломления n) луч 2 попадает к наблюдателю A под углом β . По закону преломления $\sin \alpha / \sin \beta = n$. Так как n мало отличается от 1, $\alpha = \beta + \Delta\beta$ ($\Delta\beta \ll \beta$) и $\sin \alpha = \sin(\beta + \Delta\beta) \approx \sin \beta + \Delta\beta \cdot \cos \beta$. Используя теперь закон преломления, находим $\Delta\beta \approx (n-1) \operatorname{tg} \beta = 3 \cdot 10^{-4}$ рад ≈ 1 угл. мин.

Примечание. Полученный результат оказывается справедливым и в том случае, когда учитывается изменение показателя преломления по высоте атмосферы. Разбор этого общего случая предоставляем читателю.

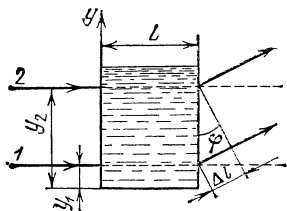


Рис. 4.79.

4.31. $n = 1,0006$ (см. решение задачи 4.30).

4.32. Рассмотрим два луча, проходящие через сосуд на разной высоте y_1 и y_2 (рис. 4.79). Оптическая длина пути луча 1 равна $l_1 = L(n_0 + \alpha y_1)$. Мы пренебрегаем искривлением луча внутри сосуда, так как оно по условию мало. Для луча 2 имеем $l_2 = L(n_0 + \alpha y_2)$. Угол, на который повернется фронт волны на выходе из сосуда, $\varphi \approx (l_2 - l_1)/(y_2 - y_1) = \alpha L$.

В фокальной плоскости линзы лучи, падающие под углом φ к оптической оси, соберутся в побочном фокусе, смещенном относительно главного фокуса на расстояние $\Delta y = f \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi f = \alpha L f$.

Тонкие линзы

4.33. Прямая SS_1 пересекает оптическую ось OO_1 в оптическом центре линзы, так как через эту точку луч проходит не преломляясь (рис. 4.80). Итак, найдено положение линзы, и, кроме того, теперь уже видно, что изображение мнимое, прямое и уменьшенное; следовательно, линза рассеивающая. Чтобы найти положение ее фокуса, проводим прямую $SA \parallel OO_1$. После преломления в линзе ее продолжение должно проходить через точку S_1 . Точка пересечения AS_1 с OO_1 и есть главный фокус линзы F .

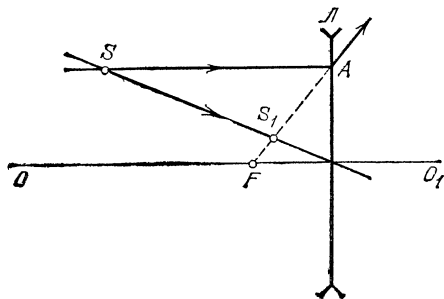


Рис. 4.80.

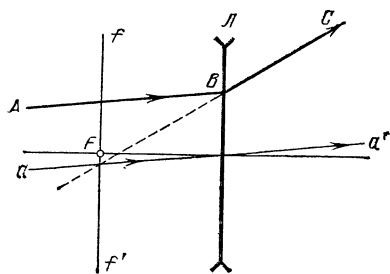


Рис. 4.81.

4.34. Проведем вспомогательный луч aa' , проходящий через оптический центр линзы параллельно лучу AB (рис. 4.81). Продолжение луча BC пересекается с лучом aa' в фокальной плоскости линзы ff' . Точка F — главный фокус линзы.

4.35. Сначала построением вспомогательного луча aa' , параллельного AB , определим положение фокальной плоскости ff' (рис. 4.82). Затем при помощи

вспомогательного луча bb' , параллельного DE , определим направление преломленного луча EF . Случай, когда точка пересечения лучей AB и DE лежит справа от линзы, предоставляем рассмотреть читателю.

4.36. Расстояние от источника S до линзы $a = \sqrt{lL}$; фокусное расстояние $f = \sqrt{lL} - l > 0$.

4.37. Построим изображения источников A и B . Изображение источника A будет находиться на главной оптической оси в точке A' на расстоянии $2f$ от линзы. Построение изображения источника B ясно из рис. 4.83. Искомый угол определяется из соотношения $\operatorname{tg} \psi = y/(b - 2f)$,

где y и b — расстояния от изображения B' до главной оптической оси и линзы. С другой стороны, $\operatorname{tg} \varphi = x/(2f - a)$, где x и a — расстояния от источника B до главной оптической оси и линзы. Из подобия треугольников BCO и $B'C'O$ имеем

$x/y = a/b$. По формуле линзы $1/a + 1/b = 1/f$, откуда $b = af/(a - f)$. Используя эти уравнения, находим

$$\frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{y}{x} - \frac{2f - a}{b - 2f} = \frac{b}{a} \frac{2f - a}{b - 2f}.$$

Подставляя выражение для b , получим $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi$. Следовательно, $\psi = 30^\circ$. Итак, если расположить экран под углом 30° к главной оптической оси так, чтобы он пересекал главную оптическую ось в точке, отстоящей на расстоянии $2f$ от линзы, то изображения обоих источников будут четкими.

4.38. Пусть x — расстояние от предмета до изображения, тогда расстояние от линзы до изображения $b = x - a$. Воспользуемся формулой линзы $1/f = 1/a + 1/(x - a)$. После преобразования получаем

$$a^2 - ax + fx = 0, \quad a = x/2 \pm \sqrt{(x/2)^2 - fx}.$$

Учитывая, что f , a и x — действительные величины, получаем $(x/2)^2 - fx \geq 0$. Изображение действительное; следовательно, $f > 0$ и $x > 0$. Поэтому $x/4 - f \geq 0$, а $x_{\min} = 4f$. Соответственно имеем $a = 2f$.

4.39. $f = (L^2 - l^2)/4L$.

4.40. $f = -l\beta/(1 - \beta)^2 = -10$ см.

4.41. Увеличение $\beta = (b - f)/f = f/(a - f)$. Так как $L = a + b$, получаем $L = f(1 + \beta)^2/\beta$, а $L_2/L_1 = (1 + \beta_2)^2 \beta_1/(1 + \beta_1)^2 \beta_2$. Решая это квадратное уравнение, находим два решения: $\beta'_2 = 5$, $\beta''_2 = 1/5$.

4.42. $f_2 = 25$ см.

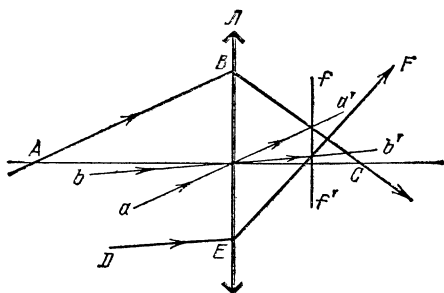


Рис. 4.82.

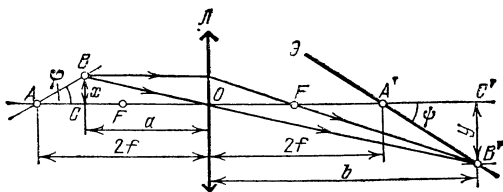


Рис. 4.83.

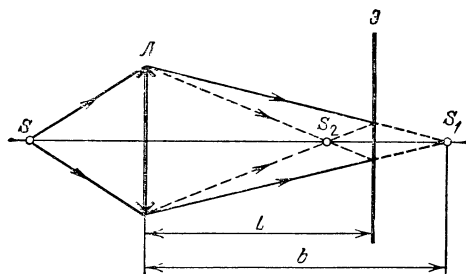


Рис. 4.84.

4.43. Из рис. 4.84 видно, что возможны два решения. Если изображение источника получается за экраном (S_1), то $d/D = (b - L)/b$, откуда $b = L/(1 - d/D)$. По формуле линзы $a = \frac{bf}{b - f} = \frac{Lf}{L - f(1 - d/D)} = 15,8$ см. Во втором случае получаем $a' = \frac{Lf}{L - f(1 + d/D)} = 20$ см.

4.44. $f = l(1 + \sqrt{2}) = 9,65$ см. Линза может быть как собирающей, так и рассеивающей.

$$4.45. \beta = [(b - f)/(a - f)]^{1/2} = 3.$$

$$4.46. l = l\beta/2 = 9 \text{ см.}$$

$$4.47. \beta = 2f/l = 2.$$

4.48. Так как $\beta = (b - f)/f$, получаем $f = b/(1 + \beta)$. Подставляя в эту формулу экспериментальные данные из графика, находим $f = 5$ см.

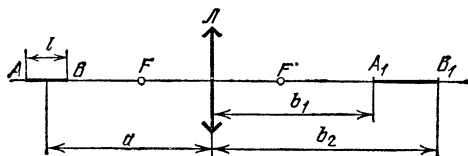


Рис. 4.85.

4.49. Пусть A_1 — изображение точки A , B_1 — изображение точки B (рис. 4.85). Применяя дважды формулу линзы для этих точек, получим

$$\frac{1}{a + l/2} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{a - l/2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f}.$$

Из этих соотношений имеем

$$b_1 = \frac{(a + l/2)f}{a + l/2 - f}, \quad b_2 = \frac{(a - l/2)f}{a - l/2 - f}.$$

После несложных вычислений получим

$$A_1B_1 = b_2 - b_1 = \frac{f^2 l}{(a - f)^2 - (l/2)^2}.$$

Искомое продольное увеличение выразится формулой

$$\beta = \frac{b_2 - b_1}{l} = \frac{f^2}{(a - f)^2 - (l/2)^2}.$$

4.50. Из рис. 4.86 видно, что изображение кубика имеет вид усеченной пирамиды с квадратным основанием. Длина стороны большего основания равна l , так как в этом случае $a_1 = b_1 = 2f$ и увеличение $\beta = 1$. Для меньшего основания по формуле линзы имеем $b_2 = a_2 f / (a_2 - f) = (2f + l)f / (f + l)$. Из подо-

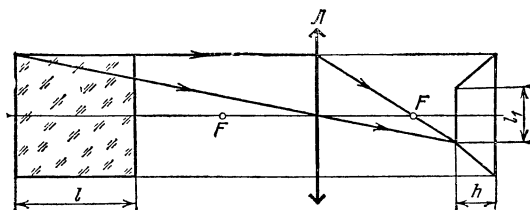


Рис. 4.86.

бля треугольников находим длину l_1 меньшего основания: $l_1 = l(b_2 - f)/f = lf/(f + l)$. Высота пирамиды $h = 2f - b_2 = fl/(f + l)$. Объем этой усеченной пирамиды

$$V = \frac{h}{3} (l^2 + l_1^2 + ll_1) = \frac{l^3}{3} \frac{f}{f+l} \left[1 + \frac{f^2}{(f+l)^2} + \frac{f}{f+l} \right].$$

4.51. В отсутствие стеклянной пластинки расстояние от линзы до изображения $b = a/(aD - 1) = 60$ см, где $D = 1/f$ — оптическая сила линзы. Рассмотрим теперь преломление лучей в пластинке. Как видно из рис. 4.87, вертикальное смещение луча, прошедшего через пластинку, $d = L(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$, где α и β — углы падения и преломления. Отсюда $a - a' = d/\operatorname{tg} \alpha = L(1 - \operatorname{tg} \beta/\operatorname{tg} \alpha)$. Для малых углов α и β отношение тангенсов можно заменить отношением синусов: $\operatorname{tg} \beta/\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \beta/\sin \alpha = 1/n$. Таким образом,

$$a' = a - L(n-1)/n = 25 \text{ см},$$

$$b' = a'/(a'D - 1) = 100 \text{ см}.$$

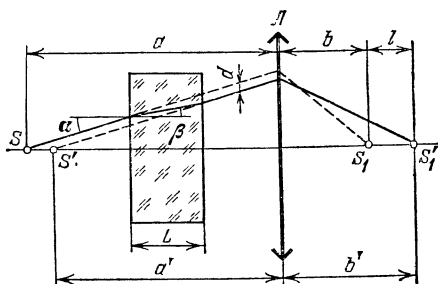


Рис. 4.87.

Искомое расстояние l между изображениями равно $b' - b$:

$$l = \frac{L(n-1)}{[(aD-1)n - LD(n-1)](aD-1)} = 40 \text{ см}.$$

4.52. Проведем вспомогательный луч aa' параллельно лучу BC через оптический центр линзы L_2 (рис. 4.88). Луч aa' должен пересечь продолжение преломленного луча CD в фокальной плоскости ff' линзы L_2 . Таким образом, мнимое изображение источника S будет находиться в точке S_2 . Как видно из построения, на линзу L_2 падает сходящийся в S_1 пучок лучей. В подобных случаях принято говорить, что S_1 играет для линзы L_2 роль «мнимого» источника.

4.53. Обычным построением вспомогательного луча aa' , параллельного лучу AB , найдем направление преломленного луча BC (рис. 4.89). Далее,

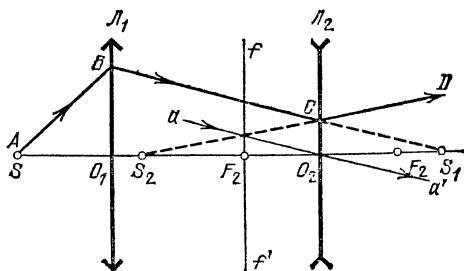


Рис. 4.88.

построением, аналогичным рассмотренному в задаче 4.52, определим положение фокальной плоскости линзы L_1 , направление преломленного луча CD и тем самым положение изображения S_2 .

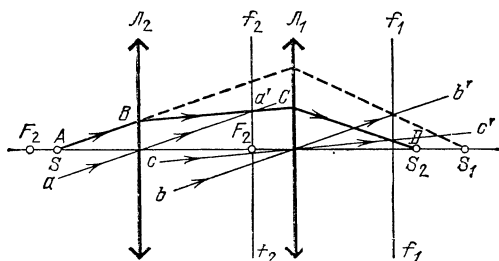


Рис. 4.89.

4.54. В отсутствие плоского зеркала изображение S_1 источника располагается на двойном фокусном расстоянии от линзы. Для того чтобы лучи, отраженные от зеркала, пройдя вторично через линзу, стали параллельными, необходимо, чтобы они пересекались в заднем фокусе линзы. Это произойдет в том случае, когда расстояние между линзой и зеркалом будет равно $3f/2$. Ход лучей показан на рис. 4.90.

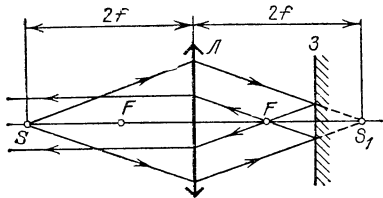


Рис. 4.90.

4.55. Изображение глаза, полученное после того, как лучи второй раз прошли через линзу, находится за линзой ($d > a$), т. е. оно мнимое.

Так как по условию $d = a + f$, оно находится в заднем фокусе линзы. При этом «предмет» (точка, в которой сходятся лучи, отраженные от зеркала) должен находиться от линзы на расстоянии a_1 таком, что $1/f = 1/a_1 - 1/f$, откуда $a_1 = f/2 = 5$ см. После первого прохождения лучей через линзу, если бы не было зеркала, изображение было бы расположено на расстоянии $b = af/(a - f) = 30$ см от линзы. Так как в плоском зеркале предмет и изображение расположены симметрично относительно зеркала, искомое расстояние $l = a_1 + (b - a_1)/2 = 17,5$ см.

4.56. Пусть d — диаметр глаза. Изображение в плоском зеркале имеет тот же размер и расположено на расстоянии $2a$ от глаза; следовательно, его угловой размер $\alpha_0 = d/2a$. Если поставить линзу, лучи, пройдя через нее, дали бы изображение за линзой на расстоянии $b = af/(a - f)$, где f — фокусное расстояние линзы. При отражении в зеркале происходит обращение лучей — «изображение» перемещается в точку на расстоянии b перед линзой. При втором прохождении лучей через линзу это изображение является для нее предметом, расположенным на расстоянии b . По формуле линзы находим положение изображения, учитывая, что это изображение мнимое:

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1}, \quad \text{откуда} \quad b_1 = -\frac{bf}{b+f} = \frac{af}{f-2a}.$$

Увеличение двух линз равно произведению увеличений каждой из них, поэтому размер изображения глаза $d_1 = d(b/a)b_1/b = df/(f - 2a)$. Расстояние от глаза до

изображения $l = a + b_1 =$
 $= 2a(f - a)/(f - 2a)$. Угловой
 размер изображения
 $\alpha = d_1/l = \alpha_0 f/(f - a)$, $\gamma =$
 $= \alpha/\alpha_0 = f/(f - a) = 1,5$, от-
 куда $f = 60$ см.

4.57. Рассматривая изо-
 бражение источника S_1 в
 линзе (рис. 4.91) как мни-
 мый источник для линзы L_2
 и применяя для них формулу линзы (с учетом знаков), получаем $f_2 =$
 $= -f_1^2(a_1 + f_1)/a_1^2 = -9,37$ см.

4.58. Изображение, даваемое собирающей линзой, играет роль источника
 для рассеивающей линзы. Положение этого изображения определим по фор-
 муле линзы (рис. 4.92): $b_1 = a_1 f_1/(a_1 - f_1) = 30$ см. Запишем теперь формулу для
 рассеивающей линзы: $1/a_2 + 1/b_2 = 1/f_2$, где $f_2 = -16$ см — фокусное расстояние

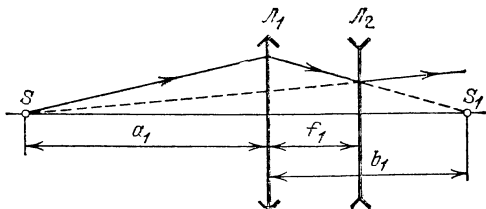


Рис. 4.91.

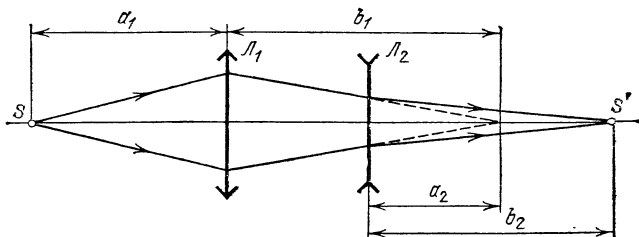


Рис. 4.92.

рассеивающей линзы. В этой формуле знаки расставлены так, что действитель-
 ному предмету или изображению соответствуют положительные a_2 и b_2 , мни-
 мому — отрицательные. Анализ формулы рассеивающей линзы показывает, что
 величина $b_2 > 0$ (действительное изображение) будет при $f_2 < a_2 < 0$. Таким
 образом, расстояние между линзами может изменяться в пределах от $b_1 - |f_2| =$
 $= 14$ см до $b_1 = 30$ см.

4.59. Если последовательно строить изображения в системе из двух линз,
 считая первое изображение, даваемое линзой L_1 (рис. 4.93), источником (дей-
 ствительным или мнимым) для линзы L_2 , то нетрудно
 видеть, что такая система может давать прямое изо-
 бражение предмета в двух случаях: во-первых, когда
 каждое последовательное преобразование оставляет
 изображение прямым; во-вторых, когда после каждого
 преобразования изображение получается обратным.
 Расположение линз исключает второй случай. Таким
 образом, необходимо, чтобы мнимое прямое изо-
 бражение, даваемое линзой L_1 , находилось на участке
 $O_1 F_1$ слева от линзы L_1 . Это изображение будет играть роль действительного
 источника для линзы L_2 , расположенного на расстоянии $a_2 < f_2$, следовательно,
 его изображение (которое и будет окончательным) будет прямым и мнимым.

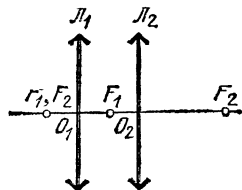


Рис. 4.93.

Применим для L_1 формулу линзы: $1/a_1 + 1/b_1 = 1/f_1$. Расстояния a_1 и b_1
 отсчитываются от линзы L_1 , причем b_1 может изменяться от нуля до $-f_1$

($b_1 < 0$ — изображение мнимое). Учитывая интервал изменения b_1 , получаем интервал возможных положений предмета: $0 < a_1 \leq f_1/2$.

4.60. $0 < a_1 \leq f/3$.

4.61. $a_1 < 2f = 10$ см.

4.62. $a_1 < f_1 (f_2 - l)/(f_1 + f_2 - l) = 10$ см.

4.63. Увеличение $\beta = f/(a - f) = (b - f)/f$. Для системы линз $\beta = \beta_1 \beta_2$, т. е.

$$\beta = \frac{b_1 - f_1}{f_1} \frac{f_2}{a_2 - f_2}$$
. Но $a_2 = l - b_1$, поэтому $\beta = \frac{f_2}{f_1} \frac{b_1 - f_1}{l - b_1 - f_2}$. Увеличение не будет зависеть от положения предмета, а следовательно и от b_1 , если $(b_1 - f_1)/(l - b_1 - f_2) = A = \text{const}$, откуда $l = A^{-1} [b_1 (1 + A) - (f_1 - A f_2)]$; l не зависит от b_1 , если $A = -1$, при этом $l = f_1 + f_2$.

4.64. Применяя дважды формулу линзы и учитывая, что $f_1 + f_2 = l$, получаем для f_1 следующее квадратное уравнение:

$$(a + b + l) f_1^2 - l (2a + l) f_1 + al^2 = 0,$$

откуда находим два решения: $f_1' = 40$ см, $f_1'' = 48$ см. Соответственно для второй линзы получаем $f_2' = 20$ см, $f_2'' = 12$ см.

4.65. $\Delta L = l (f_2 - f_1)/[l - (f_2 + f_1)] = 60$ см, где l — расстояние между линзами, а $f_2 + f_1 = 0$.

4.66. $|f_2| = a f_1/(a - f_1) - l$, $f_2 = -20$ см.

4.67. Пусть α — угловой размер Солнца. Изображение Солнца в первой линзе расположено в ее фокальной плоскости, его размер $d_1 = \alpha f_1$ (угол α достаточно мал). От второй линзы это изображение находится на расстоянии $a_2 = l - f_1$, причем $a_2 < 0$. Используя формулу линзы, находим расстояние между изображением во второй линзе и самой линзой: $b_2 = f_2 (f_1 - l)/(f_1 + f_2 - l)$, где $f_2 < 0$. Диаметр этого изображения $d_2 = d_1 b_2/a_2 = \alpha f_1 f_2/(f_1 + f_2 - l)$. В одиночной тонкой линзе диаметр изображения $d = \alpha f$. Так как $d = d_2$, получаем $f = f_1 f_2/(f_1 + f_2) = 40$ см.

4.68. Увеличение системы линз равно произведению увеличений каждой из них. Используя в обоих случаях формулу линзы, находим $l = 2f_1 = 4$ см.

4.69. Главными фокусами объектива называются точки, в которых собирается параллельный главной оптической оси пучок света, падающий на объектив слева и справа. Рассмотрим пучок, падающий слева (рис. 4.94, а).

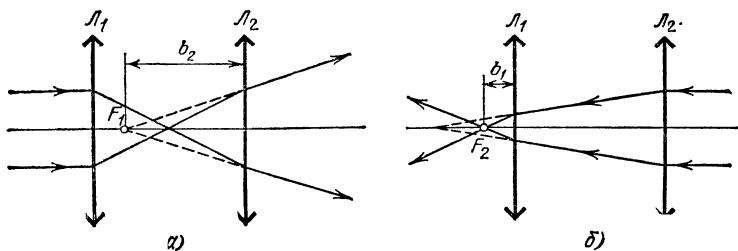


Рис. 4.94.

Так как $f_1 < l$, а $l - f_1 < f_2$, то фокус F_1 расположен между линзами на расстоянии $b_2 = |(l - f_1) f_2/(l - f_1 - f_2)| = 7,5$ см от второй линзы. Если пучок падает справа (рис. 4.94, б), он собирается в точке F_2 , лежащей слева от первой линзы на расстоянии $b_1 = f_1/2 = 2,5$ см.

4.70. Рассматривая параллельные пучки, падающие на систему слева и справа, получаем, что в этом случае оба главных фокуса лежат вне системы линз — один находится справа от второй линзы на расстоянии $b_2 = 7,5$ см, другой — слева от первой линзы на расстоянии $b_1 = 37,5$ см.

4.71. Угловое увеличение в такой системе линз (телескопе) равно отношению фокусных расстояний линз: $\gamma = f_1/f_2$. Так как $f_1 + f_2 = l$, получаем

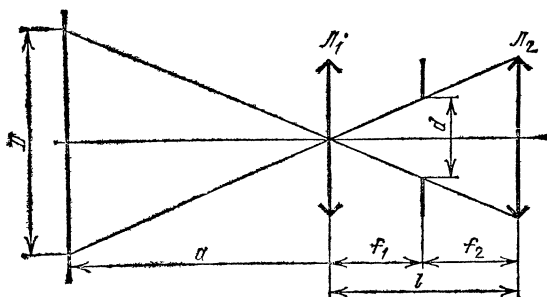


Рис. 4.95.

$f_1 = l\gamma/(\gamma + 1)$.⁷ Как видно из рис. 4.95, диаметр видимой области $D = da/f_1 = da(\gamma + 1)/l\gamma = 4$ м.

4.72. Ход лучей в системе линз изображен на рис. 4.96. При этом $f_1/f_2 = \gamma$, $D = df_1/f_2$, откуда $D = d\gamma = 10$ см.

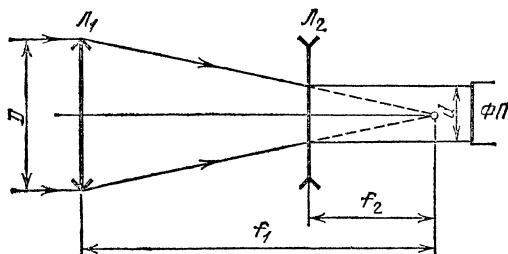


Рис. 4.96.

4.73. Пусть малый источник света находится в фокусе линзы L_1 . Световые лучи после преломления в линзе L_1 будут параллельны оптической оси, а после преломления в линзе L_2 соберутся в ее фокусе. Если расстояние между линзами значительно меньше фокусного расстояния каждой из линз, то систему из двух линз можно рассматривать как тонкую линзу. Применяя теперь формулу тонкой линзы к системе из двух линз, получим $1/f_1 + 1/f_2 = 1/f$, или $D_1 + D_2 = D$, где f — фокусное расстояние системы из двух линз, D — ее оптическая сила.

4.74. Принимая во внимание, что оптические силы тонких линз, приложенных вплотную друг к другу, складываются (см. решение задачи 4.73), получим

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_{12}}, \quad \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = \frac{1}{f_{23}}, \quad \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = 0.$$

Последнее соотношение вытекает из того, что при сложении всех трех линз получается система с нулевой оптической силой — плоскопараллельная

пластинка. Решая эти уравнения, найдем

$$f_3 = -f_{12} > 0, \quad f_1 = -f_{23} > 0, \quad f_2 = f_{12}f_{23}/(f_{12} + f_{23}) < 0.$$

4.75. Как известно, оптическая сила линзы $1/f_1 = (n-1)(1/R_1 + 1/R_2)$, где R_1 и R_2 — радиусы кривизны выпуклых поверхностей линз. Во втором случае добавляется третья линза (водяная) с вогнутыми поверхностями, с радиусами кривизны R_1 и R_2 и оптической силой $1/f = (n_b - 1)(-1/R_1 - 1/R_2)$. Общая оптическая сила равна сумме оптических сил составляющих линз (см. решение задачи 4.73):

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f}, \quad \text{откуда} \quad f_2 = \frac{n-1}{n-n_b} f_1 = 2f_1.$$

$$\mathbf{4.76.} \quad f_2 = -\frac{n-1}{n_b-n} f_1 = 2f_1.$$

4.77. Оптические силы линз, находящихся в различных средах, равны

$$\begin{array}{ll} 1/f = (n-1)(1/R_1 + 1/R_2) & \text{в воздухе,} \\ 1/f_1 = (n/n_1 - 1)(1/R_1 + 1/R_2) & \text{в воде,} \\ 1/f_2 = (n/n_2 - 1)(1/R_1 + 1/R_2) & \text{в сероуглероде.} \end{array}$$

Решая совместно эти уравнения, находим

$$f = \frac{n_1 - n_2}{n_2(n_1 - 1)/f_2 - n_1(n_2 - 1)/f_1} = 36 \text{ см.}$$

4.78. Толстую линзу можно рассматривать как сумму тонкой линзы и плоскопараллельной пластинки. Оптическая сила тонкой линзы в воздухе $1/f = (n-1)/R$, откуда $f = R/(n-1) = 5$ см. Рассмотрим ход луча, параллельного

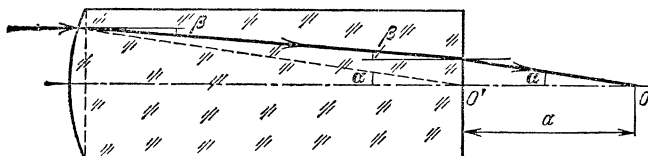


Рис. 4.97.

главной оптической оси, через эту систему (рис. 4.97). Если бы не было стеклянной пластинки, луч после линзы попал бы в точку O' (так как толщина пластинки равна фокусному расстоянию линзы). Дважды преломившись на поверхностях пластинки, он выйдет из нее под тем же углом α к оси и пересечет ее в точке O . Найдем расстояние OO' (обозначим его a). Так как углы малы, по закону преломления имеем $\alpha = \beta n$. Из рис. 4.97 видно, что $\alpha f = \beta f + \alpha a$, откуда $a = f(\alpha - \beta)/\alpha = R/n = 5/3$ см. Если параллельные лучи падают на линзу справа, они не преломляются в плоскопараллельной пластине и фокусируются на расстоянии $f = 5$ см слева от линзы.

4.79. Фокус находится слева (линза рассеивающая) на расстоянии $a = R(2n-1)/(n-1)n = 8$ см от плоского края или на плоской границе, если лучи падают справа (см. решение задачи 4.78).

Сферические зеркала

4.80. Проводим прямые через концы предмета и изображения — через точки A и A_1 , B и B_1 (рис. 4.98). Эти прямые перпендикулярны поверхности зеркала, а точка их пересечения O — оптический центр кривизны зеркала. Отложим

точку A' , симметричную точке A относительно оси BB_1 . Прямая $A'A_1$ пересекает ось в точке C , лежащей на поверхности зеркала. Окружность радиуса OC

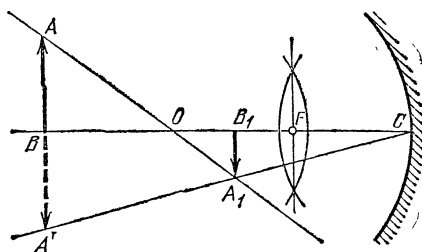


Рис. 4.98.

с центром в точке O и есть поверхность зеркала. Оно, как видно из построения, — вогнутое, а изображение A_1B_1 — действительное. Разделив отрезок OC пополам, найдем фокус зеркала F .

4.81. Построение выполняется аналогично построению в задаче 4.80. Зеркало оказывается выпуклым, изображение — мнимым (рис. 4.99).

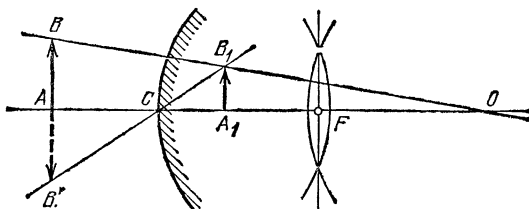


Рис. 4.99.

4.82. Пусть a — расстояние от источника S до зеркала, b — расстояние от изображения S_1 до зеркала (рис. 4.100), а f — фокусное расстояние зеркала.

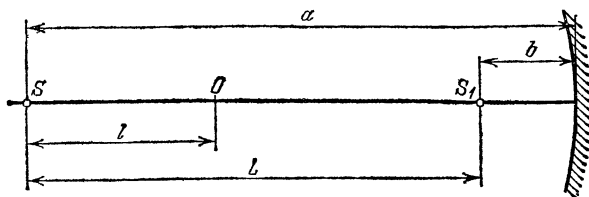


Рис. 4.100.

Тогда $a = 2f + l$, $b = 2f + l - L$. По формуле зеркала находим $1/(2f + l) + 1/(2f + l - L) = 1/f$, откуда $f = l(L - l)/(2l - L)$. Задача имеет решение, если $2l > L > l$, при этом $f > 0$.

4.83. Возможны два решения задачи

а) Когда изображение S' источника в зеркале находится перед стеной (рис. 4.101), имеем

$$(L - b)/b = d/D, \text{ откуда } b = L/(1 + d/D).$$

По формуле зеркала находим

$$a = bf/(b - f) = Lf/[L - f(1 + d/D)] = 1,14 \text{ м.}$$

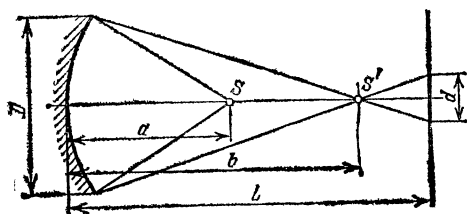


Рис. 4.101.

4.85. В обозначениях рис. 4.102 имеем

$$1/a + 1/b = 1/f, \quad H/h = b/a = 3, \quad b - a = l.$$

Учитывая данные задачи, из двух последних соотношений получим $a = 10$ см, $b = 30$ см и, следовательно,

$$f = ab/(a + b) = 7,5 \text{ см.}$$

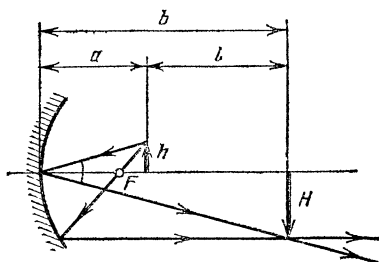


Рис. 4.102.

б) Когда изображение S' источника находится за стеной, имеем

$$(b - L)/b = d/D,$$

откуда

$$b = L/(1 - d/D).$$

По формуле зеркала находим

$$a = Lf/[L - f(1 - d/D)] = 1,04 \text{ м.}$$

$$4.84. D = 2rL/j^2 + d = 3,5 \text{ м.}$$

4.86. Изображения располагаются на расстояниях $(2n - 1)f/n$ от каждого из зеркал, где n — любое целое положительное число.

4.87. Найдем положение изображения, которое образуется при отражении лучей сначала от первого, затем от второго зеркала (при этом учтем, что изображение, получаемое в первом зеркале, играет роль источника для второго зеркала): $1/a + 1/b = 1/f$, или $b = af/(a - f)$,

где b — расстояние от изображения S_1 до первого зеркала. При $b > 0$ изображение в первом зеркале действительное, при $b < 0$ — мнимое. Расстояние от изображения S_2 до второго зеркала равно $2f - b$ (рис. 4.103). Следовательно, $1/(2f - b) + 1/c = 1/f$, где c — расстояние от второго изображения S_2 до второго зеркала. После несложных преобразований получим $c = f(2f - b)/(f - b) = 2f - a$. Таким образом, изображение, получающееся после отражения лучей от обоих зеркал, совпадает с самим источником.

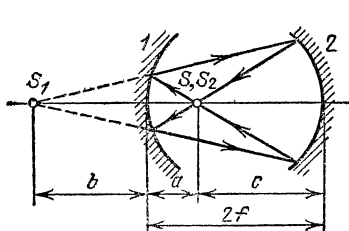


Рис. 4.103.

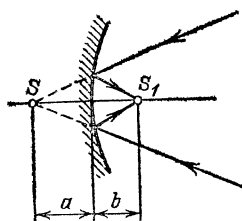


Рис. 4.104.

4.88. Точка пересечения лучей S играет роль мнимого источника, расположенного на расстоянии $a_1 = -a$ от зеркала (рис. 4.104). Применяя формулу

зеркала, получим $-1/a + 1/b = 1/f$ ($f = R/2$); следовательно, $b = a^2/(a + f) = aR/(2a + R) = 10$ см. В данном случае $b > 0$; это означает, что точка пересечения отраженных лучей действительна.

4.89. Точка пересечения лучей S играет роль мнимого источника, расположенного на расстоянии $a_1 = -a$ от зеркала (рис. 4.105). Для нахождения расстояния b от зеркала до изображения S_1 запишем формулу зеркала: $-1/a + 1/b = 1/f$ ($f = -R/2$). Отсюда $b = af/(a + f) = aR/(R - 2a)$. При $a = 15$ см и $R = 60$ см получим $b = 30$ см ($b > 0$, изображение действительное). При $a = 40$ см и $R = 60$ см получим $b = -120$ см ($b < 0$, изображение мнимое).

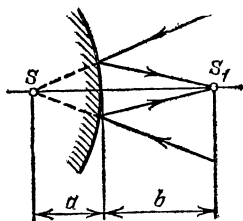


Рис. 4.105.

4.90. Используя формулу зеркала, имеем $1/a + 1/b = 2/R$, откуда расстояние от зеркала до изображения $b = aR/(2a - R)$. Расстояние от глаза (предмета) до изображения $l = a - b = 2a(a - R)/(2a - R)$. Если линейный размер глаза равен y , размер изображения глаза $y' = y |b/a| = y |R/(2a - R)|$. При этом угол, под которым виден глаз, $\alpha = y'/l = y |R/2a(a - R)|$. Угол, под которым виден глаз в плоском зеркале, $\alpha_0 = y/2a$. Угловое увеличение $\gamma = \alpha/\alpha_0 = |R/(a - R)|$, откуда $R = a\gamma/(\gamma - 1) = 54$ см ($R/2 > a$, изображение мнимое).

4.91. $R = (l_2^2 - l_1^2)/2l_2 = 4,2$ см.

4.92. На первое зеркало падает параллельный пучок лучей, и изображение S_1 (мнимое) получается в фокусе зеркала Z_1 (рис. 4.106). Расстояние до изображения S_2 во втором зеркале найдем по формуле

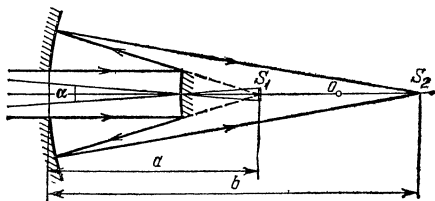


Рис. 4.106.

$$\frac{1}{R_2 - R_1/2} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R_2},$$

откуда

$$b = \frac{R_2(2R_2 - R_1)}{2(R_2 - R_1)}$$

Если угловой размер Солнца равен α , то линейный размер изображения Солнца в первом зеркале $y_1 = \alpha R_1/2$. Во втором зеркале

$$y_2 = y_1 \frac{b}{a} = \alpha \frac{R_1}{2} \frac{R_2(2R_2 - R_1) \cdot 2}{2(R_2 - R_1)(2R_2 - R_1)} = \alpha \frac{R_1 R_2}{2(R_2 - R_1)}.$$

В линзе размер изображения Солнца $y = \alpha f$; следовательно, $f = R_1 R_2 / 2(R_2 - R_1) = 10$ см.

4.93. $f = R_1 R_2 / 2(R_2 - R_1) = 5$ см.

4.94. Построим ход луча, падающего параллельно оси сосуда (рис 4.107). Точка F — фокус системы (в ней собираются параллельные лучи после отражения от зеркала). Если бы воды не было, фокус зеркала находился бы в точке F' ; при этом отрезок $OF' = R/2$. Используя закон преломления и учитывая, что углы α и β малы, находим

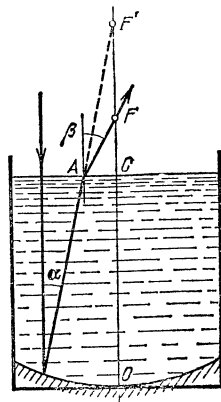


Рис. 4.107.

$$OF \approx H/2 + (R - H)/2n = 36,3 \text{ см.}$$

4.95. Будем рассматривать плоскогнутую линзу с посеребренной плоской поверхностью как систему, состоящую из линзы и прижатого к ней вплотную плоского зеркала (рис. 4.108). Положение первого изображения определится по формуле линзы: $b = af/(a - f)$ ($f < 0$). Второе изображение S_2 , образующееся после отражения лучей от зеркала, но без учета повторного прохождения через линзу, расположится на расстоянии $b_1 = -b$. Наконец, после повторного прохождения через линзу лучи сойдутся в точке S_3 , положение которой найдется по формуле линзы: $a_1 = b_1f/(b_1 - f) = af/(2a - f)$. Поскольку $f' < 0$, при любых a изображение оказывается мнимым (т. е. $a_1 < 0$).

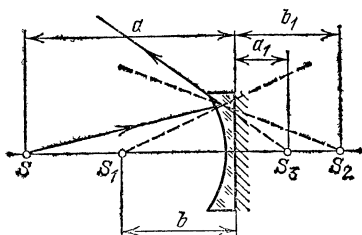


Рис. 4.108.

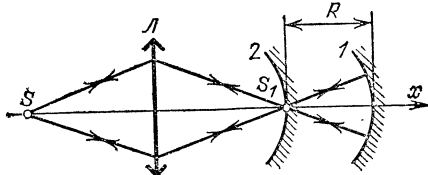


Рис. 4.109.

4.96. Зеркало можно располагать либо на расстоянии R за изображением источника, либо в месте изображения. В первом случае отраженные лучи идут в обратном направлении по тому же пути; во втором случае лучи при отражении меняются местами, но выходят из той же точки (рис. 4.109). При перемещении зеркала вправо от точки S_1 изображение начинает перемещаться вправо от точки S и уходит в направлении $x = +\infty$; затем изображение появляется при $x = -\infty$ и стремится к точке S (при смещении зеркала на расстояние R).

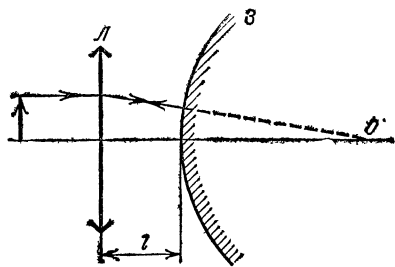


Рис. 4.110.

4.97. Увеличение изображения не зависит от положения предмета, если параллельный оптической оси луч, идущий от предмета к линзе, после отражения от зеркала и прохождения линзы остается параллельным оптической оси (рис. 4.110). Это воз-

можно в том случае, когда задний фокус линзы совпадает с центром кривизны зеркала (точка O). При этом $l = f_l - R_3 = f_l - 2f_3 = 5$ см.

$$4.98. f_3 = (f_l + l)/2 = 6 \text{ см.}$$

4.99. Возможны три случая взаимного расположения линзы и зеркала, при котором увеличение системы $\beta = 1$: а) центр зеркала находится в плоскости изображения предмета, даваемого линзой, при этом расстояние между зеркалом и линзой $x_1 = b$; б) фокус линзы совпадает с центром кривизны зеркала, при этом расстояние между зеркалом и линзой $x_2 = f_l + R_3$; в) изображение, создаваемое линзой, находится в центре кривизны зеркала, при этом расстояние между зеркалом и линзой $x_3 = b + R_3$.

Смещение зеркала не будет зависеть от радиуса кривизны зеркала, если перемещение происходит между точками 2 и 3: $l = x_3 - x_2 = b - f$. По формуле

линзы $b = af/(a - f)$; значит, $l = af/(a - f) - f$, что приводит к квадратному уравнению относительно f : $f^2 + lf - la = 0$, откуда $f = 6$ см. Второй корень уравнения отрицателен и, следовательно, не удовлетворяет условию задачи.

4.100. $a = f(f - l)/l = 40$ см.

4.101. Изображение S_1 образуется при отражении лучей от той части зеркала, которая не перекрыта линзой. Изображение S_2 образуется при отражении лучей от зеркала и двукратном прохождении через линзу (рис. 4.111). Пусть f — фокусное расстояние зеркала, а f_1 — фокусное расстояние системы из сложенных вплотную линзы и зеркала. Тогда

$$1/a + 1/b_1 = 1/f, \quad 1/a + 1/b_2 = 1/f_1.$$

Вычитая почленно первое уравнение из второго, получим $1/b_2 - 1/b_1 = 1/f_1 - 1/f$. Легко показать, что $1/f_1 = 1/f + 2/f_l$, где f_l — фокусное расстояние линзы. Для доказательства этого соотношения допустим, что точечный источник света помещен на расстоянии f_l (в фокусе линзы) от системы линза — зеркало.

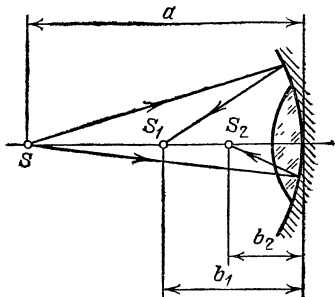


Рис. 4.111.

Световые лучи, пройдя через линзу, будут падать на зеркало параллельно оптической оси. После отражения от зеркала эти лучи сошлись бы, если не учитывать вторичного прохождения через линзу, в фокусе зеркала, т. е. на расстоянии f от системы. Фактически же после вторичного прохождения через линзу лучи сойдутся на некотором расстоянии a от системы, которое легко определить по формуле линзы; при этом фокус зеркала следует рассматривать по отношению к линзе как мнимый источник: $-1/f + 1/a = 1/f_l$. Это соотношение можно переписать в виде $1/f_l + 1/a = 1/f + 2/f_l$ и рассматривать как формулу для системы линза — зеркало. Как видно из этой формулы, оптическая сила системы $1/f_1 = 1/f + 2/f_l$, что и требовалось доказать. Таким образом,

$$\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f} = \frac{2}{f_l}, \quad \text{откуда} \quad f_l = \frac{2b_1b_2}{b_1 - b_2} = 25 \text{ см.}$$

4.102. $f = -R = 60$ см.

4.103. Перевернутое изображение всегда действительное, и зеркало при этом — вогнутое. Следовательно, расстояние до изображения $b = af/(a - f)$, а его увеличение $\beta = b/a = f/(a - f)$. В системе линза — зеркало изображение прямое, т. е. мнимое. Так как увеличение прежнее, то оно находится на расстоянии b от зеркала. Оптическая сила системы равна $1/f + 2/f_l$ (см. решение задачи 4.101). Итак, мы получаем

$$1/f + 2/f_l = 1/a - 1/b, \quad \text{откуда} \quad f_l = af/(f - a);$$

$f_l < 0$, так как $a > f$ (изображение в зеркале действительное).

4.104. $R = af/(f - a) = -30$ см.

4.105. Жидкость, налитую в зеркало, можно рассматривать как плоско-выпуклую линзу, оптическая сила которой $1/f_l = (n - 1)/R$. Оптическая сила системы линза — зеркало (см. решение задачи 4.101)

$$1/f_3 + 2/f_l = 2/R + 2(n - 1)/R = 2n/R.$$

Так как звезда — бесконечно удаленный источник, ее изображение находится в фокусе системы, т. е. $0,7a = R/2n$. Без жидкости $a = R/2$. Итак, $n = 1/0,7 = 1,43$.

4.106. Одно изображение образуется лучами, которые проходят сквозь полупрозрачный слой, другое — теми, которые отражаются от него. В первом случае изображение дает линза, во втором — система линза — зеркало. Так как изображения одинаковы, оптические силы линзы и системы линза — зеркало равны: $1/f = 1/f_3 + 2/f$, откуда получаем, что $f_3 = -f$, или радиус кривизны задней поверхности линзы $R_2 = -2f = 20$ см. Радиус кривизны R_1 находим по известной формуле:

$$1/f = (n-1)(1/R_1 + 1/R_2), \quad \text{откуда} \quad R_1 = 2f(n-1)/(n+1) = -4 \text{ см.}$$

Линза вогнуто-выпуклая. Если $f = +5$ см, $R_1 = +2$ см, $R_2 = -10$ см, линза выпукло-вогнутая.

4.107. $f = a = +34$ см.

4.108. $f = 2a = 56$ см.

4.109. Из данных задачи видно, что система конфокальная, т. е. фокусы зеркал Z_1 и Z_2 совпадают. Следовательно, луч, идущий к зеркалу Z_1 параллельно

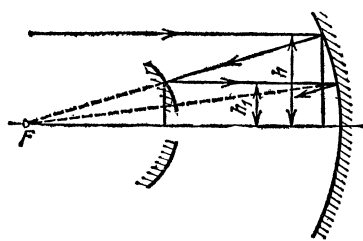


Рис. 4.112.

оптической оси и после отражения от него идущий по направлению к фокусу, после отражения от зеркала Z_2 снова будет идти параллельно оптической оси, но ниже (рис. 4.112). Так как $h \ll L$, из подобия треугольников получаем, что после первого отражения $h_1 = h/2$ ($f = L$), а после n -го отражения $h_n = h/2^n$. Луч выйдет из системы, когда $h_n \leq d/2$. Отсюда получаем $20 \leq 2^n$, $n \geq 5$, т. е. луч выйдет из системы после пяти от-

ражений. Он пройдет в системе путь $l = 9L$, и время задержки луча в системе $\tau = 9L/c = 1,5 \cdot 10^{-7}$ с.

4.110. $\tau = 6L/c = 1,1 \cdot 10^{-7}$ с.

Оптические приборы

4.111. $f = L/(1 + \beta) = 9,95$ см, где $\beta = 200$ — увеличение объектива.

4.112. Учитывая, что оптические силы объектива и насадочной линзы складываются, получаем $\beta = \frac{L(1 + f_1/f_2) - f_1}{L - f_1}$.

4.113. Линзы расположены не вплотную друг к другу, их нельзя заменить

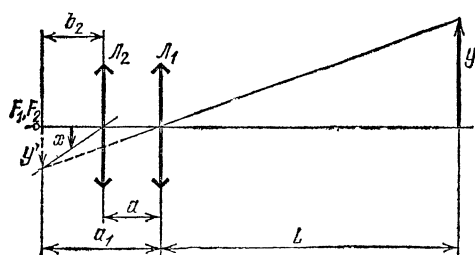


Рис. 4.113.

одной линзой с суммарной оптической силой, и надо рассматривать последовательно ход лучей через каждую из линз (рис. 4.113). Изображение, даваемое линзой L_1 , — увеличенное и действительное, поэтому «предмет», т. е. изображение, даваемое линзой L_2 , должен находиться между фокусом и двойным фокусом линзы L_1 . Так как $a < f_1$,

изображение, даваемое линзой \mathcal{L}_2 , должно быть мнимым. Так как $L \gg f_1$, то $a_1 \approx f_1$ и увеличение линзы \mathcal{L}_1 $\beta_1 \approx L/f_1 = 50$. Расстояние от изображения y' до линзы \mathcal{L}_2 $b_2 = a_1 - a \approx f_1 - a$. Так как изображение мнимое, увеличение линзы \mathcal{L}_2 $\beta_2 = (b_2 + f_2)/f_2 = 2$. Общее увеличение системы $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 = 100$.

4.114. $\varphi = d/f = 7 \cdot 10^{-8}$ рад.

4.115. Рассмотрим ход лучей в очковой линзе (рис. 4.114). Глаз, вооруженный линзой, рассматривает мнимое изображение S_1 предмета S . Оптическая сила линзы должна быть подобрана так, чтобы это изображение находилось на расстоянии $b = d_1$ наилучшего зрения дальнорезкого глаза, если предмет помещен на расстоянии наилучшего зрения нормального глаза ($a = d = 25$ см). В этом случае дальнорезкий глаз, вооруженный линзой, будет эквивалентен нормальному глазу. Таким образом, $D = 1/f = 1/d - 1/d_1 = 2$ дптр.

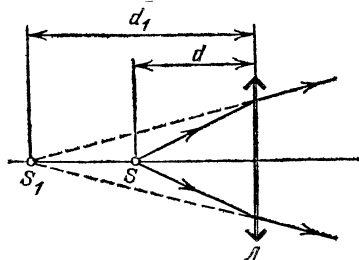


Рис. 4.114.

4.116. Дальняя точка аккомодации нормального глаза находится на бесконечности; дальняя точка близорезкого глаза — на расстоянии $d_1 = 20$ см. Очки, восполняющие недостаток такого глаза, должны быть таковы, чтобы бесконечно удаленный предмет казался находящимся на расстоянии $d_1 = 20$ см. Следовательно, $f = -20$ см и $D = -5$ дптр.

Примечание. Речь идет об очках для дальнего зрения. Такие очки, вообще говоря, могут оказаться неподходящими для ближнего зрения (например, для чтения).

4.117. Для ближней точки аккомодации имеем $1/a_1 - 1/d_1 = 1/f$, где a_1 и d_1 — расстояния до ближних точек аккомодации глаза с очками и без очков, f — фокусное расстояние очковой линзы. Таким образом, $a_1 = d_1 f / (d_1 + f) \approx 16,7$ см. Аналогично для дальней точки аккомодации получим $a_2 = d_2 f / (d_2 + f) = \infty$.

4.118. Глаз рассматривает мнимое изображение S_1 предмета S , образовавшееся при преломлении световых лучей на границе вода — воздух (рис. 4.115). Расстояние l от изображения до поверхности воды связано с глубиной погружения предмета d соотношением $l = d/n$ (см. решение задачи 4.2). Таким образом, дальняя точка аккомодации близорезкого глаза находится на расстоянии $l \approx 23$ см; следовательно, человек должен носить очки с фокусным расстоянием $f = -23$ см; $D \approx -4,5$ дптр.

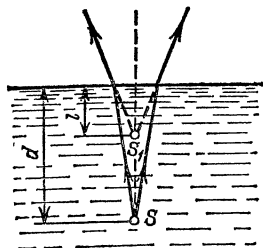


Рис. 4.115.

4.119. $D = 2$ дптр.

4.120. $l = d/2 (1 - Dd) = 6,25$ см, где $d = 25$ см.

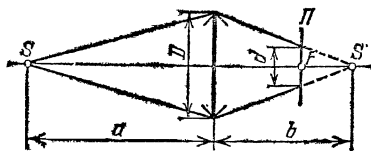


Рис. 4.116.

4.121. Так как фотоаппарат сфокусирован на бесконечность, пленка расположена в фокальной плоскости объектива (рис. 4.116). Точка S , находящаяся на расстоянии a от фотоаппарата, будет четко изображаться на расстоянии b в точке S' . На пленке она будет изображаться кружком диаметра $d=0,1$ мм. При этом $D/d=b/(b-f)$. Используя формулу линзы, находим $a=f^2/2d=12,5$ м.

4.122. $v=d(a-f)/f\tau=10$ м/с.

4.123. $\tau=d(a-f)/f\sqrt{2gH}=5\cdot 10^{-3}$ с.

4.124. $H\leq lf/d=400$ м, $v<l/\tau=50$ м/с=180 км/ч.

4.125. $l=dH/f=10$ м, $\tau\leq l/v=1,25\cdot 10^{-3}$ с, где v —первая космическая скорость.

4.126. Увеличение объектива равно произведению увеличений каждой из линз. Так как $H\gg f_1$, изображение получается в фокальной плоскости, а увеличение первой линзы $\beta_1=f_1/H$. Расстояние от этого изображения до второй линзы $a_2=a-f_1$, а увеличение второй линзы $\beta_2=f_2/(a-f_1-f_2)$. Увеличение объектива $\beta=\beta_1\beta_2=|f_1f_2/H(a-f_1-f_2)|=2\cdot 10^{-4}$. Размеры участка местности равны $X=x/\beta=120$ м и $Y=y/\beta=180$ м.

4.127. $\beta_2/\beta_1=h(a-f)/f^2+1=5,5$.

4.128. Для того чтобы изображения двух точечных источников S_1 и S_2 не перекрывались, необходимо, чтобы расстояние между центрами светлых

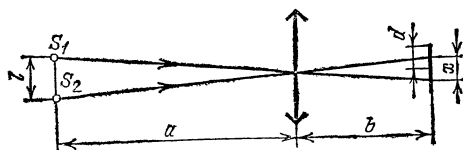


Рис. 4.117.

кружков x равнялось или превышало диаметр кружка d (рис. 4.117). Если $a\gg f$, изображения источников S_1 и S_2 будут располагаться практически в фокальной плоскости линзы, т. е. $b\approx f$. Поэтому $x=fl/a$. Для того чтобы изображения

источников не перекрывались, должно выполняться условие $fl/a\geq d$, откуда $a_{\max}=fl/d=5$ м.

4.129. Если диаметр объектива фотоаппарата равен D , а разрешающая способность пленки n , следовательно, допустимое размытие деталей изображения равно l , то из рис. 4.118 видно, что

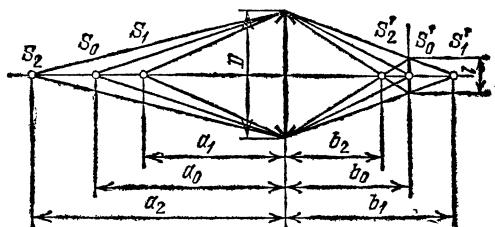


Рис. 4.118.

$$\frac{l}{D}=\frac{b_0-b_2}{b_2}=\frac{b_1-b_0}{b_1},$$

$$2/b_0=1/b_1+1/b_2.$$

По формуле линзы

$$1/b=1/f-1/a,$$

$$2/a_0=1/a_1+1/a_2,$$

$$c_0=2a_1a_2/(a_1+a_2)=10$$
 м.

4.130. Дальняя граница лежит в бесконечности.

4.131. Расстояние между зрачками у человека $R_0\approx 65$ мм, а на снимке $R\approx 6,5$ мм, т. е. увеличение объектива $\beta_1\approx R/R_0\approx 0,1$ (разумеется, это — приблизительная оценка, как и все остальные). Ширина ладони $d_0\approx 8$ см, на снимке $d\approx 1,5$ см; следовательно, увеличение для ладоней $\beta_2\approx d/d_0\approx 0,19$. Расстояние от глаз до ладоней полусогнутых рук $l_0\approx 40$ см. Если a —расстоя-

ние от ладоней до объектива, то расстояние от зрачков до объектива равно $a + l_0$. При этом увеличение объектива $\beta_2 = f/(a - f)$, $\beta_1 = f/(a + l_0 - f)$. Из этих уравнений находим

$$f = \frac{l_0 \beta_1}{1 + \beta_1 - \beta_1 (1 + 1/\beta_2)} \approx 8,5 \text{ см}, \quad a = \frac{f(1 + \beta_2)}{\beta_2} \approx 54 \text{ см}.$$

Размер рыбы на снимке (т. е. расстояние между ладонями) $L_0 \approx 8,5$ см, увеличение при этом равно β_2 . Итак, размер рыбы, пойманной рыбаком, $L = L_0/\beta_2 \approx 45$ см. На снимке видно, что зрачки изображаются четко, а ладони рук размыты, т. е. на пленку сфокусировано изображение глаз. Расстояние от объектива до пленки $b_0 = (a + l_0) f/(a + l_0 - f) = 9,3$ см, а расстояние до изображения рук $b_1 = af/(a - f) = 10$ см. Будем считать размытие деталей изображения рук равным $l = 0,2$ мм. Воспользовавшись рис. 4.118, получаем диаметр объектива: $D = lb_1/(b_1 - b_0) = 3$ мм.

4.132. Расстояние b_1 от объектива до первого изображения найдем по формуле линзы: $b_1 = a_1 f_1/(a_1 - f_1)$. Размер первого изображения $y_1 = b_1 x/a_1 = f_1 x/(a_1 - f_1)$, где x — размер предмета. Расстояние a_2 от первого изображения до окуляра определим по формуле линзы, принимая во внимание, что второе (мнимое) изображение должно располагаться на расстоянии $b_2 = -d$, где d — расстояние наилучшего зрения для нормального глаза: $a_2 = df_2/(d + f_2)$. Размер второго изображения $y_2 = dy_1/a_2 = f_1(d + f_2)x/f_2(a_1 - f_1)$. Отсюда найдем увеличение:

$$\alpha = y_2/x = f_1(d + f_2)/f_2(a_1 - f_1) \approx 370.$$

Определим теперь длину микроскопа:

$$l = b_1 + a_2 = a_1 f_1/(a_1 - f_1) + df_2/(d + f_2) \approx 16,8 \text{ см}.$$

4.133. В трубе, установленной на бесконечность, расстояние между объективом и окуляром равно сумме $f_1 + f_2$. Первое изображение удаленных предметов располагается в общей фокальной плоскости объектива и окуляра; в этой

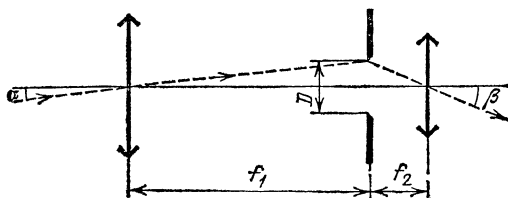


Рис. 4.119.

плоскости и следует расположить диафрагму поля зрения. Размер диафрагмы определяет угол поля зрения. Он равен 2α (рис. 4.119). Принимая во внимание малость угла α , можно записать $2\alpha \approx 2 \operatorname{tg} \alpha = D/f_1 = 0,04$ рад $\approx 2^\circ 15'$. Параллельный пучок света, входящий в объектив под углом α , выйдет из окуляра под углом β . Угловое увеличение

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{D/2f_2}{D/2f_1} = \frac{f_1}{f_2} = 7,5.$$

Примечание. Глаз обладает значительной областью аккомодации. У нормального человеческого глаза эта область простирается с расстояния около 10 см до бесконечности. В тех случаях, когда глаз вооружен зрительным

прибором (очки, лупа, микроскоп, зрительная труба), мнимое изображение предмета, рассматриваемое глазом, должно, конечно, располагаться в области аккомодации. Однако его положение даже для одного и того же человека может в широких пределах изменяться от опыта к опыту, что практически не отражается на качестве наблюдаемого изображения. При изменении аккомодации оптический прибор, вооружающий глаз, должен быть перефокусирован (в случае микроскопа, например, это достигается перемещением тубуса относительно предмета, в случае зрительной трубы — перемещением окуляра относительно объектива). Таким образом, ход лучей в приборе зависит от того, как в данном случае аккомодирован глаз.

При расчете характеристик оптических приборов обычно полагают, что глаз аккомодирован либо на бесконечность (в этом случае ход лучей оказывается наиболее простым), либо на расстояние наилучшего зрения (равное для нормального глаза 25 см). Если в задаче нет соответствующего указания, рекомендуется решать задачу в предположении, что глаз аккомодирован на бесконечность. Это приводит к заключению о том, что длина зрительной трубы должна быть равна сумме фокусных расстояний объектива и окуляра.

$$4.134. \Delta l = f^2/(a-f) = 5 \text{ мм.}$$

4.135. Поскольку $a < f_1$, объектив даст мнимое изображение предмета, положение которого определим по формуле линзы. В обозначениях рис. 4.120 имеем

$$1/a + 1/b = 1/f_1 \quad \text{или} \quad b = af_1/(a - f_1) \quad (b < 0).$$

Размер мнимого изображения $y' = |b| x/a = f_1 x/(f_1 - a)$, где x — размер предмета. Так как труба настроена на бесконечность, расстояние между объективом и

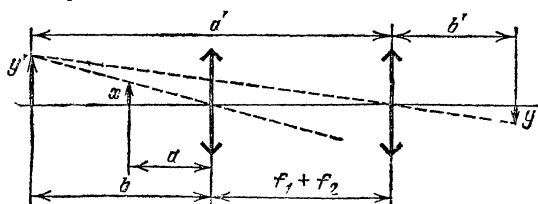


Рис. 4.120.

окуляром равно сумме фокусных расстояний $f_1 + f_2$ (см. примечание к решению задачи 4.133); следовательно, расстояние от мнимого изображения до окуляра

$$a' = -b + f_1 + f_2 = (f_1^2 + f_1 f_2 - a f_2)/(f_1 - a).$$

Расстояние $a' > f_2$; поэтому изображение, даваемое окуляром, будет действительным. Расстояние b' от окуляра до изображения найдем по формуле линзы:

$$b' = a' f_2 / (a' - f_2) = f_2 (f_1^2 + f_1 f_2 - a f_2) / f_1^2.$$

Найдем теперь размер изображения: $y = b' y' / a' = f_2 x / f_1$. Таким образом, увеличение $\beta = y/x = f_2/f_1 = 0,1$. Следует отметить, что β не зависит от положения источника.

4.136. Мнимое изображение расположено на расстоянии $-f_2 (f_1^2 + f_1 f_2 - a f_2) / f_1^2$ от окуляра. Увеличение $\beta = -f_2/f_1 = 1/10$ (см. решение задачи 4.135).

4.137. Так как предмет удален, изображение в первой линзе (объективе) расположено в ее фокальной плоскости на расстоянии f_1 . При этом расстояние до второй линзы (окуляра) $a_2 = L - f_1$. По формуле линзы расстояние от оку-

ляра до изображения

$$b'_2 = (L_1 - f_1) f_2 / (L_1 - f_1 - f_2) = -7,5 \text{ см}, \quad b''_2 = (L_2 - f_1) f_2 / (L_2 - f_1 - f_2) = -45 \text{ см}.$$

Знак минус означает, что изображение мнимое. Если глаз расположит вплотную за окуляром, наблюдатель может отчетливо видеть предметы на расстояниях от 7,5 до 45 см.

4.138. Расстояние L от объектива до окуляра меняется в пределах

$$f_1 + b_2 f_2 / (b_2 + f_2) \leq L \leq f_1 + f_2, \quad \text{т. е.} \quad 37,5 \text{ см} \leq L \leq 38 \text{ см}.$$

4.139. Объектив зрительной трубы Галилея дает в фокальной плоскости изображение Солнца диаметра $d = \alpha f_1$. Это изображение служит мнимым источником для окуляра (рис. 4.121). Имеем $1/a + 1/b = 1/f_2$ ($a < 0$, $f_2 < 0$). Но $a = L - f_1$, откуда $L = f_1 + + b f_2 / (b - f_2) = 54 \text{ см}$. Далее из соотношения $D/d = b/(f_1 - L)$ находим диаметр изображения Солнца: $D = \alpha f_1 b / (f_1 - L) = 2 \text{ см}$.

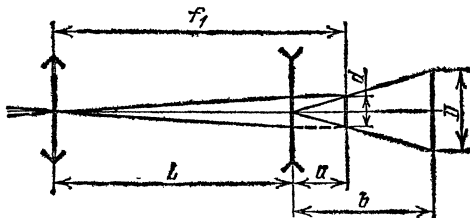


Рис. 4.121.

Для зрительной трубы Кеплера читателю предлагается решить задачу самостоятельно. Ответ. $L = 43,7 \text{ см}$, $D = 1,4 \text{ см}$.

4.140. С помощью бинокля рассматриваются удаленные предметы, находящиеся на расстоянии, много большем f_1 . Поэтому можно считать, что первое изображение S_1 , даваемое объективом, находится в его фокальной плоскости (рис. 4.122). Это изображение играет по отношению к окуляру роль мнимого

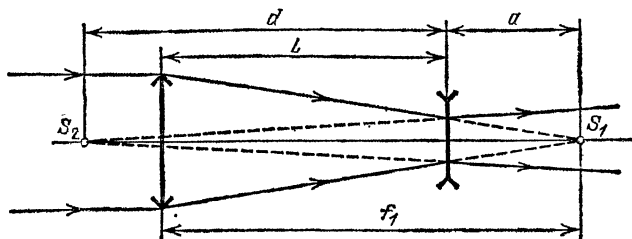


Рис. 4.122.

источника, находящегося на расстоянии $a_1 = -a$ от окуляра. Изображение S_2 , даваемое окуляром, находится на расстоянии $b_1 = -d$, где $d = 25 \text{ см}$ — расстояние наилучшего зрения нормального глаза. Применив формулу линзы, получим $a = -d f_2 / (d + f_2) = 4,76 \text{ см}$. Расстояние между объективом и окуляром $L = f_1 - a = 3,24 \text{ см}$. В том случае, когда глаз аккомодирован на бесконечность, фокусы объектива и окуляра совмещены и, следовательно, $L_1 = f_1 + f_2 = 4 \text{ см}$, $L_1 - L = 0,76 \text{ см}$.

4.141. Изображение удаленного предмета, даваемое объективом, располагается в его фокальной плоскости. Это изображение играет по отношению к окулярной (рассеивающей) линзе роль мнимого предмета. Мнимое изображение, рассматриваемое глазом, должно располагаться на расстоянии $b_1 = -d$.

где d — расстояние наилучшего зрения. Если a — расстояние между окуляром и фокальной плоскостью объектива, то по формуле линзы имеем $1/a_1 + 1/b_1 = 1/f$. Учитывая, что $a_1 = -a$, найдем $a = -fd/(f+d)$. При $d = d_1 = 20$ см получим $a' = -fd_1/(f+d_1) = 5$ см. При $d = d_2 = 50$ см будем иметь $a'' = -fd_2/(f+d_2) = 4,35$ см. Расстояние между объективом и окуляром равно $f_1 - a$, где f_1 — фокусное расстояние объектива. Таким образом, дальноручному зрителю придется сильнее раздвигать трубку бинокля. При передаче бинокля от близоручного зрителя к дальноручному длина трубки должна быть увеличена на величину $a' - a'' = 0,65$ см.

Фотометрия

4.142. Освещенность $E = 2I \cos \alpha / (l^2 + h^2) = 2Ih / (l^2 + h^2)^{3/2}$ (рис. 4.123), откуда сила света лампы $I = E(l^2 + h^2)^{3/2} / 2h \approx 110$ кд.

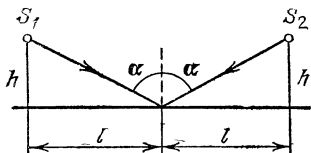


Рис. 4.123.

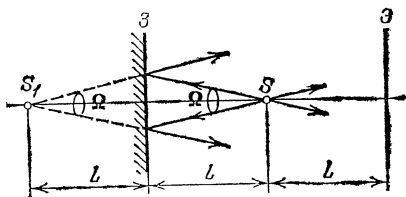


Рис. 4.124.

4.143. В отсутствие зеркала освещенность в центре экрана $E = I/L^2$, где I — сила света источника, г. е. поток световой энергии, отнесенный к единице телесного угла. При наличии зеркала освещенность определяется соотношением $E_1 = I/L^2 + I_1/(3L)^2$, где I — по-прежнему сила света источника, I_1 — сила света изображения в плоском зеркале. Легко показать, что для идеально отражающего зеркала $I_1 = I$. Действительно, световой поток в некотором телесном угле Ω (рис. 4.124) после отражения от зеркала будет распространяться в том же телесном угле Ω ; при этом поток не изменяется и по величине (идеальное отражение). Это как раз и означает, что $I_1 = I$. Таким образом, $E_1 = I/L^2 + I/(3L)^2 = 10E/9$.

4.144. Пусть I_0 — сила света лампочки. Найдем световой поток, падающий

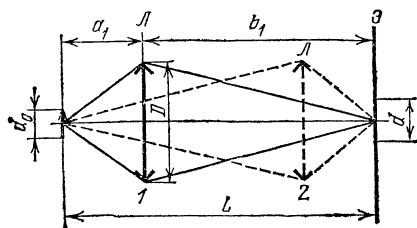


Рис. 4.125.

на линзу (и изображение) в первом случае (рис. 4.125): $\Phi_1 = I_0 \pi D^2 / 4a_1^2$. Площадь изображения при этом $S_1 = S_0 b_1^2 / a_1^2 = S_0 (L - a_1)^2 / a_1^2$, где S_0 — площадь источника. Освещенность $E_1 = \Phi_1 / S_1 = I_0 \pi D^2 / 4S_0 (L - a_1)^2$. Во втором случае (рис. 4.125) из симметрии формулы линзы следует, что $a_2 = b_1 = L - a_1$, и мы получаем, что освещенность $E_2 = I_0 \pi D^2 / 4S_0 a_1^2$. По условию $E_2 / E_1 = 9$, откуда получаем

уравнение $(L - a_1)^2 / a_1^2 = 9$. Решая его, находим, что $a_1 = L/4 = 25$ см. Следовательно, $b_1 = L - a_1 = 75$ см, а фокусное расстояние линзы $f = a_1 b_1 / (a_1 + b_1) = 3L/16 \approx 18,8$ см.

4.145. $E_1/E_2 = (1 + \beta_2)^2 / (1 + \beta_1)^2 = 4$.

4.146. Освещенность экрана не изменится, если лучи, прошедшие через линзу, осветят всю ту область AB , куда не попадут прямые лучи от источника (рис. 4.126). Из подобия треугольников следует $|AB|/D = L/a$ и $|AB|/D = (L-a-b)/b$. Учитывая, что $a = L/2$, находим $b = L/6$. Итак, фокусное расстояние $f = ab/(a+b) = L/8 = 12,5$ см.

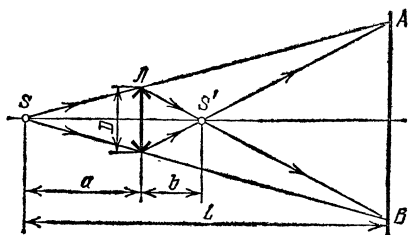


Рис. 4.126.

4.147. $f = dDL/(D+d)^2 = 1,1$ м.

4.148. Если E_0 — освещенность, которую создают падающие лучи на линзе, то освещенность в центре экрана, куда падают только лучи, прошедшие через линзу (рис. 4.127, а), $E_1 = E_0 f_1^2 / (L - f_1)^2$ (так как мы пренебрегаем потерями светового потока в линзе). Во втором случае из линзы выходит параллельный пучок света, падающий на экран (рис. 4.127, б). Его сечение в f_1/f_2 раз

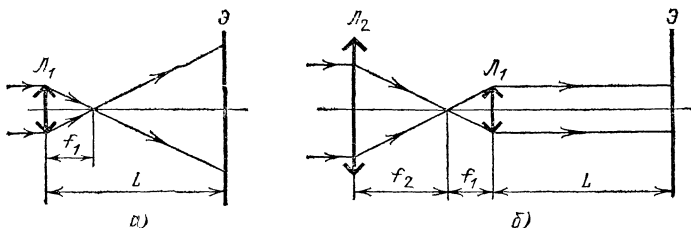


Рис. 4.127.

меньше, чем сечение на входе в систему; следовательно, освещенность экрана в этом случае $E_2 = E_0 f_2^2 / f_1^2$. Изменение освещенности $E_2/E_1 = (f_2^2/f_1^2) (L - f_1)^2 / f_1^2 = 36$.

4.149. $E_2/E_1 = (f_2^2/f_1^2) (L + f_1)^2 / f_1^2 = 16$.

4.150. Первое изображение Солнца получается в фокальной плоскости линзы L_1 , т. е. на расстоянии $f/2$ за линзой L_2 . Оно создано лучами, прошедшими через первую линзу, но не попавшими на вторую. Эти лучи проходят в линзе через кольцо с внешним диаметром D_1 , равным диаметру первой линзы, и внутренним $D'_1 = D_2 \frac{f}{f/2} = 2D_2$, где D_2 — диаметр второй линзы. Пусть E_0 — освещенность первой линзы солнечными лучами, тогда через это кольцо проходит световой поток $\Phi_1 = E_0 \cdot (\pi/4) [D_1^2 - (2D_2)^2]$. Если угловой диаметр Солнца равен α , площадь изображения Солнца в первой линзе $S_1 = (\pi/4) \alpha^2 f^2$. Освещенность первого изображения $E_1 = \Phi_1/S_1 = (E_0/\alpha^2 f^2) (D_1^2 - 4D_2^2)$. Это изображение служит предметом для второй линзы. Оно находится на расстоянии $a = -f/2$ от нее.

По формуле линзы изображение получится на расстоянии $b = af/(a-f) = f/3$. Площадь этого изображения $S_2 = S_1 (b/a)^2 = (4/9) \cdot (\pi/4) \alpha^2 f^2$. Световой поток через вторую линзу $\Phi_2 = E_0 \cdot (\pi/4) (2D_2)^2$. Освещенность второго изображения $E_2 = \Phi_2/S_2 = 9E_0 D_2^2 / \alpha^2 f^2$. Так как по условию $E_2 = E_1$, получаем $D_1^2 - 4D_2^2 = 9D_2^2$, откуда $D_1/D_2 = \sqrt{13} \approx 3,6$.

4.151. Для рассеивающей линзы L_2 изображение S_1 является предметом, расположенным на расстоянии $-a$ от нее (рис. 4.128). Используя формулу

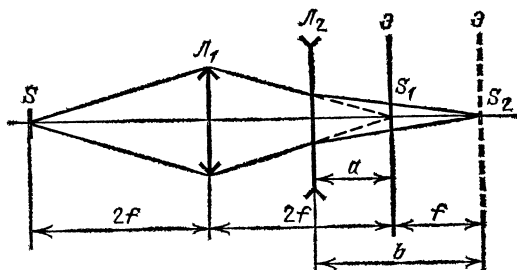


Рис. 4.128.

линзы и условие $b - a = f$, находим $a = f$, $b = 2f$. При этом площадь изображения $S_2 = S_1 (b/a)^2 = 4S_1$. Так как световой поток не изменился, освещенность $E_2 = E_0/4$.

4.152. При первом положении зеркала освещенность экрана $E_1 = 5E/4$, где E — освещенность экрана без зеркала. Если зеркало передвинуть, освещенность экрана $E_2 = 2E$. Их отношение $E_2/E_1 = 1,6$.

4.153. Пройдя через линзу, лучи пересекутся в ее фокусе (рис. 4.129). После отражения от зеркала они будут казаться исходящими из точки S' , причем $SO = OS'$. Так как по условию размеры линзы малы по сравнению с ее фокусным расстоянием, имеем $\Phi/\Phi_0 =$

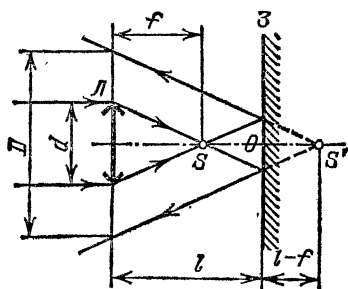


Рис. 4.129.

$= (d/D)^2 = 1/4$, откуда находим, что диаметр отраженного пучка в плоскости линзы $D = 2d$. Из подобия треугольников получаем $(l + l - f)/f = D/d = 2$ и $l = 3f/2 = 30$ см.

4.154. $\Phi/\Phi_0 = f^2/(2l + f)^2 = 0,16$.

4.155. $E_1/E = 1 + 4L^2/R^2 = 101$.

4.156. Кусок дерева легче поджечь при помощи той оптической системы, которая создает на поверхности дерева большую освещенность, т. е. концент-

рирует больший поток излучения на единицу поверхности. Подсчитаем освещенности, создаваемые линзой (E_1) и вогнутым зеркалом (E_2): $E_1 = \Phi_1/S_1$, $E_2 = \Phi_2/S_2$, где Φ_1 и Φ_2 — световые потоки, падающие на изображения Солнца, S_1 и S_2 — площади этих изображений. Если не учитывать потерь в линзе и зеркале, то световые потоки Φ_1 и Φ_2 пропорциональны площадям линзы и зеркала: $\Phi_1/\Phi_2 = d^2/D^2$. Диаметры изображений равны $l_1 = \alpha f_1$ и $l_2 = \alpha f_2 = \alpha R/2$, где α — угловой размер Солнца, f_1 и f_2 — фокусные расстояния линзы и зеркала. Поскольку S_1 прямо пропорционально l_1^2 и S_2 прямо пропорционально l_2^2 , имеем $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{dR}{D \cdot 2f_1} \right)^2 = 6,25$. Таким образом, кусок дерева легче поджечь при помощи линзы.

4.157. Если освещенность, создаваемая прямыми солнечными лучами, равна E_0 , то световой поток, проходящий через линзу, $\Phi = E_0 \cdot (\pi/4) d^2$. Пло-

щадь изображения Солнца в линзе $S = (\pi/4)(\alpha f)^2$. Освещенность изображения $E = \Phi/S = E_0 d^2/(\alpha f)^2 = 900 E_0$. Так как щиты плоские, а их размеры и расстояние до корабля таковы, что расширением отраженного пучка можно пренебречь, то падающие на них параллельные лучи они отражают параллельными, и освещенность отраженного пятна равна E_0 . Чтобы зажечь дерево, 900 воинов должны были бы одновременно свести отраженные лучи Солнца в одной точке корабля (при условии, что щиты полностью отражают падающий на них свет).

4.158. Если потери в стекле не учитывать, освещенность экрана при помещении пластинки должна возрасти, так как изображение источника света получается ближе к экрану, а сила света источника S и его изображения S' одинаковы. Последнее утверждение доказывается тем, что угол между любыми двумя лучами, выходящими из пластинки, равен углу между этими лучами до пластинки и, следовательно, один и тот же поток от источника и от изображения идет в одинаковые телесные углы.

Найдем положение изображения S' (рис. 4.130). Так как по условию размер экрана мал, углы φ и ψ тоже малы, их синусы и тангенсы можно заменять самими углами. Как видно из рис. 4.130, $|AA_1| = \varphi L/3$, $|BB_1| = (\varphi + \psi)L/3$, $|CC_1| = (2\varphi + \psi)L/3$. По закону преломления $\psi = \varphi/n$ и $|CC_1| = \varphi(2n+1)L/3n$. С другой стороны, $|CC_1| = \varphi L_1$. Мы получаем, что $L_1 = L(2n+1)/3n$. При этом освещенность экрана в отсутствие потерь в стекле была бы равна $E_1 = E(L/L_1)^2 = E \cdot 9n^2/(2n+1)^2$. В действительности освещенность не изменилась. Следовательно, доля потерянной энергии

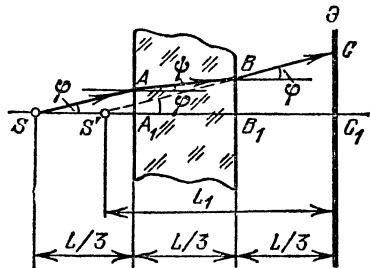


Рис. 4.130.

$$\alpha = (E_1 - E)/E_1 = (5n^2 - 4n - 1)/9n^2 = 0,21 = 21 \, \%.$$

4.159. $\alpha = 1 - f^2/L^2 \approx 0,55 = 55 \, \%$.

4.160. Если r — радиус Луны, R — расстояние от Луны до Земли, а E_0 — освещенность от Солнца, то световой поток, падающий на Луну, $\Phi_n = E_0 \cdot \pi r^2$, а поток, рассеиваемый Луной, $\Phi_p = (1 - \alpha) \Phi_n$. Поток, рассеиваемый в единичный телесный угол, т. е. сила света Луны, $I = \Phi_p/2\pi = (1 - \alpha) r^2 E_0/2$. Освещенность, создаваемая Луной на Земле, $E = I/R^2 = (1 - \alpha) r^2 E_0/2R^2$. Так как $\varphi = 2r/R$, находим $E_0/E = 8/(1 - \alpha) \varphi^2 = 8 \cdot 10^6$.

4.161. Если D — диаметр объектива телескопа, то световой поток, попадающий в него, $\Phi = E \cdot \pi D^2/4$. Площадь изображения Луны на фотопленке $S = \pi(\alpha f)^2/4$. Освещенность изображения $E_1 = (E/\alpha^2)(D/f)^2$. За время экспозиции на единицу площади пленки попадает световая энергия $H = E_1 \tau$. Из этих соотношений получаем, что светосила объектива $(D/f)^2 = H\alpha^2/E\tau = 10^{-2}$.

4.162. $\tau = (H\alpha^2/E)(f/D)^2 = 10^{-3} \text{ с.}$

4.163. Изображение Солнца в объективе расположено в его фокальной плоскости. Диаметр изображения $d = \alpha f_1$ (рис. 4.131). Так как увеличение окуляра $\beta = (b - f_2)/f_2$, то диаметр изображения Солнца $D = \alpha f_1(b - f_2)/f_2$, а площадь изображения на экране $S = \pi D^2/4$. Для того чтобы найти световой поток, проходящий через трубу, выясним, оправа какой линзы — объектива

или окуляра — сильнее ограничивает его. Предположим, что световой поток полностью заполняет окуляр. Диаметр такого пучка на объективе $D_0 = d_2 f_1 / a = d_2 f_1 (b - f_2) / b f_2 = 8,75$ см (рис. 4.131). Так как мы получили, что $D_0 < d_1$, наше предположение оказалось справедливым, т. е. световой поток, проходящий

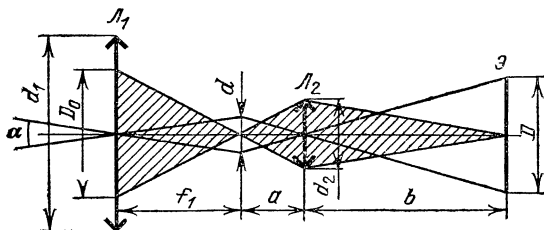


Рис. 4.131.

через трубу, ограничивается диаметром окуляра и равен $\Phi = E_0 \cdot \pi D_0^2 / 4$, а освещенность изображения $E = \Phi / S = E_0 (D_0 / D)^2$. Используя выражения для D и D_0 , получаем $E / E_0 = (d_2 / \alpha b)^2 = 6,25$.

$$4.164. \quad E / E_0 = \left[\frac{ID}{\alpha f_2 (f_1 - l/2)} \right]^2 = 25.$$

4.165. Рассмотрим параллельный пучок лучей от некоторого малого элемента лунного диска, лежащего на оптической оси трубы (рис. 4.132).

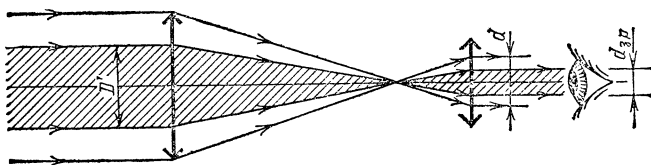


Рис. 4.132.

Диаметр d пучка, выходящего из трубы, равен $D f_2 / f_1$, где f_1 и f_2 — фокусные расстояния объектива и окуляра, а D — диаметр объектива. Освещенность изображения на сетчатке глаза зависит от соотношения между диаметром пучка d и диаметром зрачка $d_{зр}$.

В случае $d \leq d_{зр}$ вся световая энергия, поступающая в объектив, доходит до сетчатки. Освещенность изображения пропорциональна световому потоку, проникающему в зрачок (т. е. пропорциональна D^2), и обратно пропорциональна площади изображения на сетчатке (т. е. обратно пропорциональна квадрату увеличения трубы $(f_1 / f_2)^2$). Таким образом, при $d \leq d_{зр}$ имеем $E \propto D^2 (f_2 / f_1)^2$.

В случае $d > d_{зр}$ в зрачок будет проникать только часть светового потока, поступающего в объектив. Из рис. 4.132 видно, что в этом случае диаметр входного пучка лучей, проникающих в зрачок, $D' = (f_1 / f_2) d_{зр}$ и, следовательно, $E' \propto D'^2 (f_2 / f_1)^2 = d_{зр}^2$.

Освещенность E_0 изображения на сетчатке в случае невооруженного глаза пропорциональна $d_{зр}^2$. Таким образом, при выполнении условия $d \geq d_{зр}$ освещенность изображения на сетчатке глаза, вооруженного трубой, такая же, как и в случае невооруженного глаза. При $d < d_{зр}$ освещенность изображения на

сетчатке глаза, вооруженного трубой, меньше E_0 . По условию задачи

$$\frac{E_0}{E} = \frac{d_{3p}^2}{D^2 (f_2/f_1)^2} = 4, \quad \text{откуда} \quad f_2 = \frac{d_{3p}}{2D} f_1 = 1 \text{ см.}$$

4.166. При уменьшении диаметра объектива трубы от 15 до 7,5 см освещенность изображения лунной поверхности на сетчатке глаза не будет изменяться. При дальнейшем уменьшении диаметра объектива освещенность начнет уменьшаться. При $D=5$ см она окажется равной $4E_0/9$, где E_0 — освещенность в случае недифрагмированного объектива (см. решение задачи 4.165).

4.167. $L_1 = \gamma L = 10$ км.

4.168. $L_1 = DL/d_{3p} = 20$ км.

4.169. Если поглощение в атмосфере отсутствует, освещенность убывает с расстоянием по закону $E = I/r^2$. При этом вспышка, в 100 раз более сильная, даст такую же освещенность на расстоянии, в 10 раз большем, т. е. на расстоянии 10 км. По условию, однако, такая освещенность создается на расстоянии 5 км; следовательно, нельзя пренебрегать поглощением света в атмосфере. Обозначим коэффициент ослабления света на расстоянии 1 км через α . Из условия задачи следует, что $I\alpha/1^2 = 100I\alpha^5/5^2 = nI\alpha^9/9^2$, откуда $\alpha^4 = 1/4$, а $n = 9^2/\alpha^8 \approx 1300$, т. е. вспышка должна быть в 1300 раз ярче.

4.170. Рассчитаем, до какого расстояния L_0 линза перехватывает весь пучок света: $L_0 = D/\alpha = 10^4$ м = 10 км. Значит, при изменении расстояния от 5 до 10 км сигнал ослабляется только за счет поглощения света в атмосфере. В дальнейшем сигнал будет ослабляться и потому, что линза будет перехватывать лишь часть пучка. Поглощение света в атмосфере уменьшает сигнал в 2 раза на каждые 5 км, т. е. при перемещении от 10 до 20 км уменьшит сигнал в 4 раза. На расстоянии 20 км на линзу попадает часть пучка света $(D/\alpha L)^2 = 1/4$, поэтому сигнал уменьшится в 16 раз.

4.171. Количество поглощенной энергии пропорционально массе водяного пара на пути луча. Подсчитаем массу влажного воздуха на горизонтальном пути длины 4,35 км при сечении пучка 1 см²: $m_1 = \mu P_0 V/RT = 517$ г. Масса влажного воздуха в вертикальном столбе сечения $S=1$ см², проходящем через всю атмосферу Земли, $m_2 = P_0 S/g = 1033$ г = $2m_1$. Значит, поглощение энергии при прохождении излучения по вертикали через всю атмосферу равно поглощению энергии при прохождении излучением вдоль поверхности Земли расстояния $2L = 2 \cdot 4,35$ км. Следовательно, коэффициент поглощения $\alpha = 25$.

4.172. Излучение ослабится в 2500 раз (см. решение задачи 4.171).

4.173. Каждая капля, находящаяся на пути пучка, рассеивает излучение, попадающее на ее поперечное сечение πr^2 . Если сечение пучка равно S , а число капель в единице объема равно N , то на малом отрезке длины Δl пучок испытывает рассеяние на $NS \Delta l$ каплях, и рассеянная доля энергии составит $\alpha = \pi r^2 NS \Delta l/S$. Число капель в единице объема $N = \frac{\gamma}{4\pi r^3 \rho/3}$, где ρ — плотность воды. Итак, $\alpha = 3\gamma \Delta l/4\pi r$. Одинаковая доля энергии в двух рассматриваемых случаях будет рассеяна на отрезках пути, связанных соотношением

$$\frac{\gamma_1}{r_1} \Delta l_1 = \frac{\gamma_0}{r_0} \Delta l_0, \quad \text{или} \quad \Delta l_1 = \frac{\gamma_0 r_1}{\gamma_1 r_0} \Delta l_0 = 2,5 \Delta l_0.$$

Отсюда следует, что $l_1 = 2,5 l_0 = 2,5$ км.

Примечание. Отметим, что ослабление пучка на больших расстояниях зависит от длины пути более сложным образом. Для больших расстояний уже

нельзя считать, что на все капли тумана вдоль пути пучка падает излучение с одинаковой энергией, как это предполагалось для малого участка пути при написании первого соотношения. Поэтому при решении задачи проводится сравнение ослабления на малых участках пути, и так как их отношение не зависит от интенсивности пучка и длины пути, результат распространяется на случай больших расстояний.

4.174. $\gamma_2 = \gamma_1 l_2 / l_1 = 0,2 \text{ г/м}^3$ (см. решение задачи 4.173).

4.175. Рассмотрим рис. 4.133, где схематически изображены последовательные многократные отражения и преломления света в плоскопараллельной пластинке, причем угол падения φ по условию задачи мал. Пусть энергия падающего света равна E_0 . Полная энергия отраженного света $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$. Коэффициентом отражения называется отношение отраженной энергии к падающей, т. е. отношение $R = (E_1 + E_2 + E_3 + \dots) / E_0$. Поскольку при каждом отражении луча на границе раздела стекло—воздух отражается ρ -я часть энергии падающего луча, проходить через границу по закону сохранения энергии будет $(1 - \rho)$ -я часть. Поэтому энергия первого отраженного луча, испытавшего однократное отражение, $E_1 = \rho E_0$. Второй отраженный луч дважды проходит через границу раздела и один раз отражается (на нижней границе). Его энергия $E_2 = \rho (1 - \rho)^2 E_0$. Третий луч снова дважды проходит через границу и три раза отражается; следовательно, $E_3 = \rho^3 (1 - \rho)^2 E_0$, и т. д. Таким образом, $R = \rho + \rho (1 - \rho)^2 + \rho^3 (1 - \rho)^2 + \rho^5 (1 - \rho)^2 + \dots = \rho + \rho (1 - \rho)^2 [1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots]$. Нетрудно заметить, что выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию ($\rho^2 < 1$). Сумма ее членов равна $1/(1 - \rho^2)$. Поэтому окончательно получим, что $R = 2\rho/(1 + \rho)$.

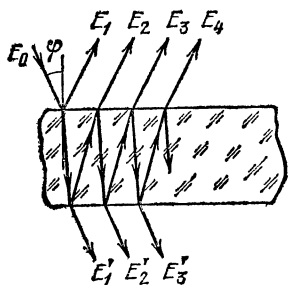


Рис. 4.133.

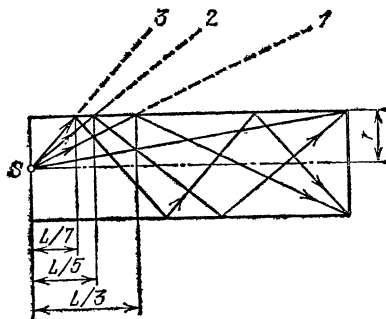


Рис. 4.134.

4.176. Как видно из рис. 4.134, лучи, не претерпевшие ни одного отражения до фотоэлемента, идут внутри конуса с телесным углом $\Omega_0 = \pi r^2 / L^2$. Лучи, претерпевшие одно отражение на стенках, идут внутри полого конуса между углами Ω_0 и $\Omega_1 = \pi r^2 (L/3)^{-2} = 9\pi r^2 / L^2$, два отражения — между углами Ω_1 и $\Omega_2 = \pi r^2 (L/5)^{-2} = 25\pi r^2 / L^2$; три отражения — между углами Ω_2 и $\Omega_3 = \pi r^2 (L/7)^{-2} = 49\pi r^2 / L^2$. Телесный угол $\Omega_3 - \Omega_2 = 24\pi r^2 / L^2$. Световой поток внутри этого телесного угла $\Phi = I (\Omega_3 - \Omega_2) = 24\pi I r^2 / L^2 = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ лм}$.

4.177. Когда стеклянная пластинка находилась в параллельном пучке света, падающем на линзу, она не оказывала влияния на ход лучей и лучи фокусировались в точке S (рис. 4.135). Фотоэлемент в этом случае располагался таким образом, что его круглый катод диаметра d в точности перекры-

вал световой поток. Если теперь стеклянная пластинка помещена между линзой и фотоэлементом, то вследствие преломления в пластинке лучи сфокусируются в точке S_1 . Следовательно, катод фотоэлемента уже не перекрывает весь световой пучок, диаметр которого в плоскости расположения катода равен теперь d_1 . Если обозначить через Δ вертикальное смещение луча после введения пластинки, то $d_1 = d + 2\Delta$. При первом расположении весь световой поток Φ_0 падал на площадку диаметра d , при втором — этот же поток в плоскости катода проходит через площадку диаметра d_1 ; следовательно, освещенность катода фотоэлемента во втором случае $E_1 = E_0 d^2 / d_1^2 = E_0 d^2 / (d + 2\Delta)^2$, где E_0 — освещенность в первом случае.

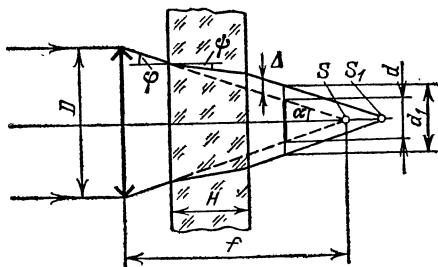


Рис. 4.135.

Ток, протекающий через фотоэлемент, пропорционален освещенности его катода; следовательно, во втором случае гальванометр покажет ток $I_1 = I d^2 / (d + 2\Delta)^2$. Нетрудно видеть, что

$$\Delta = H (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi) = H \operatorname{tg} \varphi (1 - \operatorname{tg} \psi / \operatorname{tg} \varphi).$$

Учитывая малую величину угла падения, а также замечая, что $\varphi = \alpha$, имеем $\alpha \approx H \operatorname{tg} \alpha (1 - 1/n)$. Но $\operatorname{tg} \alpha = D/2f$, откуда получаем

$$I_1 = I \frac{d^2}{[d + (1 - 1/n) HD/f]^2}.$$

4.178. При установившейся температуре шарика энергия, получаемая в единицу времени за счет поглощения световых лучей, равна энергии, рассеиваемой за то же время вследствие теплообмена с окружающим воздухом. Когда шарик освещается прямыми солнечными лучами, уравнение теплового баланса запишется в виде $\Phi_1 = k \cdot 4\pi r^2 (t_1 - t_0)$, где Φ_1 — световой поток, падающий на поверхность шарика, k — коэффициент пропорциональности, r — радиус шарика. Если на шарик спроецировано изображение Солнца, имеем $\Phi_2 = k \cdot 4\pi r^2 (t_2 - t_0)$. Если Φ_3 — световой поток, падающий на линзу, то $\Phi_1/\Phi_3 = S_1/S_3$, где S_1 — площадь поперечного сечения шарика и S_3 — площадь линзы. С другой стороны, $\Phi_3/\Phi_2 = S_2/S_1$, где площадь изображения Солнца $S_2 = \pi \alpha^2 f^2 / 4$. Таким образом, $\Phi_1/\Phi_2 = S_2/S_3 = \alpha^2 f^2 / D^2$. Следовательно,

$$\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{D^2}{\alpha^2 f^2}, \quad \text{или} \quad t_2 = t_0 + \frac{D^2}{\alpha^2 f^2} (t_1 - t_0).$$

4.179. Пусть E_0 — освещенность экрана прямыми солнечными лучами. На матовый шарик падает световой поток $\Phi_0 = E_0 \cdot \pi d^2 / 4$. По закону сохранения энергии тот же световой поток рассеивается шариком равномерно во все стороны. Следовательно, шарик излучает в единицу телесного угла световой поток $\Phi_1 = \Phi_0 / 4\pi = E_0 d^2 / 16$.

Выберем в области тени малую площадку σ , видимую с поверхности шарика под телесным углом $\Omega = \sigma / H^2$ (рис. 4.136). Освещенность площадки $E = \Phi_1 \Omega / \sigma = E_0 d^2 / 16 H^2 = 1,55 \cdot 10^{-4} E_0$. В светлой области освещенность пло-

щадки E' складывается из освещенностей, создаваемых прямыми лучами (E_0 и рассеянным светом (E_1). Учитывая, что рассеянный свет падает на площадку под углом α , а расстояние от шарика до площадки $H_1 = H/\cos \alpha$, имеем $\Omega_1 = \sigma \cos \alpha / H_1^2 = \sigma \cos^3 \alpha / H^2$ и, следовательно, $E_1 = E_0 d^2 \cos^3 \alpha / 16 H^2$. Освещенность в этой области $E = E_0 (1 + d^2 \cos^3 \alpha / 16 H^2)$, т. е. практически не зависит от наличия шарика.

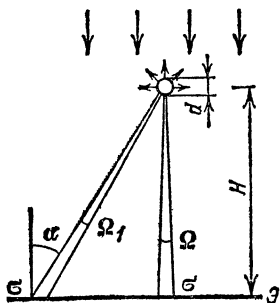


Рис. 4.136.

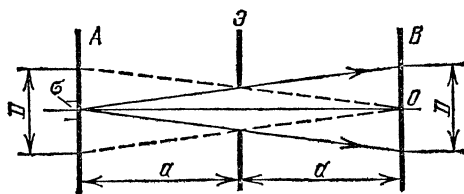


Рис. 4.137.

4.180. Рассмотрим достаточно малый элемент σ поверхности протяженного источника. Световые лучи от этого элемента, пройдя через отверстие, дадут на матовом стекле B пятно, диаметр которого $D = 2d$ (рис. 4.137). Освещенность этого пятна, создаваемая лучами от элемента σ , $E_1 = \frac{\Phi \Omega \sigma}{\pi D^2 / 4} = \frac{\Phi \Omega \sigma}{\pi d^2}$, где Ω — телесный угол, под которым видно отверстие из рассматриваемого элемента источника. При выполнении условия $d \ll a$ можно записать $\Omega = \pi d^2 / 4 a^2$ и, следовательно, $E_1 / \sigma = \Phi / 4 a^2$. Отношение E_1 / σ имеет смысл освещенности, создаваемой на матовом стекле B световыми лучами с единичной площадки источника. Для определения полной освещенности E достаточно умножить отношение E_1 / σ на площадь той части поверхности протяженного источника, которая посылает световые лучи в точку O . Проведем прямые линии из точки O через края отверстия (штриховые линии на рис. 4.137). Конус этих прямых выделяет на поверхности протяженного источника круг диаметра $D = 2d$. Таким образом $S = \pi D^2 / 4 = \pi d^2$ и $E = E_1 S / \sigma = \pi \Phi d^2 / 4 a^2$.

4.181. Энергия излучения отводится двумя путями: часть выходит обратно через отверстие, часть поглощается стенками. Если излучение внутри камеры такое, что на единицу площади поверхности в единицу времени попадает энергия E , то через отверстие выходит поток $\Phi_1 = E\sigma$, а стенками поглощается поток $\Phi_2 = E(S - \sigma)\alpha$. По закону сохранения энергии поток, поступающий в камеру за единицу времени, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Из этих соотношений получаем $\Phi_1 / \Phi = [1 + \alpha(S - \sigma) / \sigma]^{-1} = 1/3$.

4.182. $\alpha = \frac{1 - 2n}{n} \frac{\sigma}{S - 2\sigma} = 0,012 = 1,2\%$ (см. решение задачи 4.181).

Элементы волновой оптики

4.183. Каждое из зеркал дает мнимое изображение источника S (рис. 4.138). Источники S_1 и S_2 когерентны, так как представляют собой изображение одного и того же источника. Поэтому в той области, где пучки света, исходящие из этих источников, перекрываются, возможно наблюдение интерференционной картины. Ширина пучков определяется положением источ-

ника и размерами зеркала. Для того чтобы пучки могли пересечься на удаленном экране, необходимо, чтобы луч, прошедший через край зеркала, шел (при минимальном размере зеркала) параллельно оси системы. При этом $\angle AS_1K = \angle KSO = \alpha$. Из треугольника AS_1K имеем $a/2d = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ (так как угол α мал, $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$). Итак, $a \approx 2d\alpha = 2$ см.

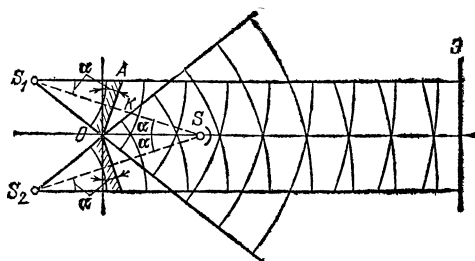


Рис. 4.138.

4.184. С помощью разрезанной линзы мы получаем два когерентных источника света S_1 и S_2 (рис. 4.139). Интерференционную картину можно наблюдать в области, где световые пучки от источников S_1 и S_2 перекрываются, т. е. за точкой O (рис. 4.139), расположенной на оси на расстоянии l за линзой. Так

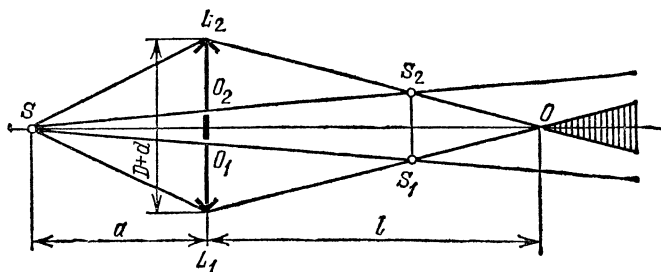


Рис. 4.139.

как по условию $a = 2f$, изображения источника тоже будут находиться на расстоянии $2f$ от линзы. Из подобия треугольников SS_1S_2 и SO_1O_2 следует, что расстояние между источниками равно $2d$. Из подобия треугольников S_1S_2O и L_1L_2O получаем $(D+d)/2d = l/(l-a)$, откуда $l = (D+d)a/(D-d) = 1,22$ м.

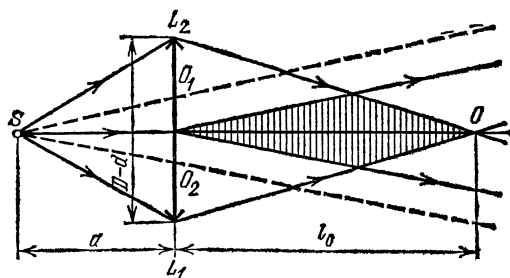


Рис. 4.140.

4.185. $l < l_0 = \frac{(D-d)af}{(D-d)(a-f) + da} = 1,125$ м (см. рис. 4.140 и решение задачи 4.184).

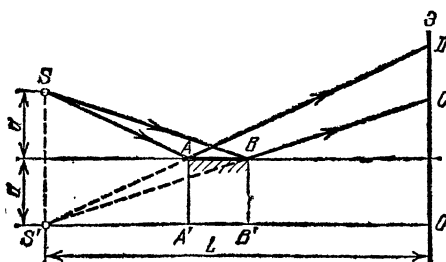


Рис. 4.141.

4.186. Из построения на рис. 4.141 видно, что размер интерференционной картины на экране равен отрезку DC . Из подобия треугольников $S'AA'$ и $S'DO$ имеем $|DO| = aL/b$. Из подобия треугольников $S'BB'$ и $S'CO$ находим $|CO| = aL/(b+d)$. Итак, $|DC| = |DO| - |CO| = aLd/b(b+d) = 16,6$ см.

4.187. Разность хода между волнами, попадающими в точку A

от источников S_1 и S_2 , равна $d = \sqrt{H^2 + l^2} - H \approx l^2/2H$. Потемнение наблюдается, если разность хода равна нечетному числу полуволи: $\lambda/2 = l^2/2H$, $3\lambda/2 = l^2/2H$, откуда $l_2 = \sqrt{3} l_1 = 3,46$ мм.

4.188. $\Delta L = 6$ м (см. решение задачи 4.187).

4.189. Пусть в какой-то момент времени источник S находится на расстоянии l от оси системы. При этом разность хода Δx между лучами, прошедшими через обе щели и попавшими в приемник A (рис. 4.142),

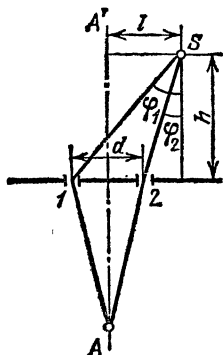


Рис. 4.142.

$$\Delta x = h (1/\cos \varphi_1 - 1/\cos \varphi_2).$$

Так как по условию углы φ_1 и φ_2 малы, имеем

$$\cos \varphi_1 \approx 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} = 1 - \frac{(l+d/2)^2}{2h^2},$$

$$\cos \varphi_2 \approx 1 - \frac{(l-d/2)^2}{2h^2}.$$

Итак, $\Delta x \approx ld/h$. За время $T = 1/f$ разность хода изменяется на λ , а расстояние l изменяется на величину vT : $\lambda = vd/fh$, откуда $v = \lambda hf/d = 4,5$ мм/с.

4.190. В приемник попадают лучи, идущие непосредственно от спутника и отразившиеся от поверхности озера (рис. 4.143). Разность хода между ними $\Delta x = |AC| - |AB|$ (BC перпендикулярен лучам 1 и 2). Из рис. 4.143 имеем $|AC| = H/\sin \alpha$, $|AB| = H \cos 2\alpha/\sin \alpha$. Так как угол α мал, $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos 2\alpha \approx 1 - (2\alpha)^2/2$ и $\Delta x \approx 2H\alpha$. Максимумы интенсивности наблюдаются, если разность хода равна целому числу длин волн λ : $2H(\alpha_2 - \alpha_1) = \lambda$, а частота сигнала $f = c/\lambda = c/2H(\alpha_2 - \alpha_1) \approx 10^9$ Гц.

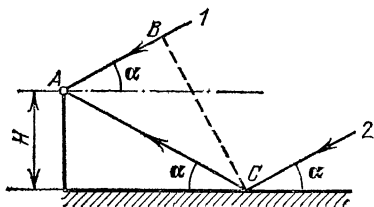


Рис. 4.143.

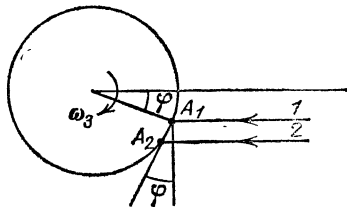


Рис. 4.144.

4.191. Пусть в результате вращения Земли антенны повернулись на угол φ от направления на звезду (рис. 4.144). Разность хода между лучами 1 и 2 $\Delta x \approx L\varphi$ (угол φ мал, L мало по сравнению с радиусом Земли). Разность фаз между колебаниями в антеннах 1 и 2

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \approx \frac{2\pi L\varphi}{\lambda} = \frac{2\pi L\omega_3 t}{\lambda},$$

где ω_3 — угловая скорость вращения Земли, а λ — длина волны падающего от звезды радиосигнала. Если частота этого сигнала равна ω , сигнал антенны 1 $a_1 = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, сигнал антенны 2 $a_2 = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi)$. В приемнике эти сигналы складываются и получается колебание

$$a = a_1 + a_2 = a_0 \cdot 2 \cos(\Delta\varphi/2) \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi/2).$$

Его амплитуда $A_0 = 2a_0 \cos(\Delta\varphi/2) \approx 2a_0 \cos(\pi L\omega_3 t/\lambda)$, т. е. амплитуда результирующего колебания изменяется по гармоническому закону с периодом $T = 2\lambda/L\omega_3 = \lambda T_3/\pi L \approx 2,3$ мин.

4.192. Найдём разность фаз между лучами 1 и 2, пришедшими в приемник B (рис. 4.145). Длина дуги AB равна 2000 км, радиус Земли равен 6400 км. Угол $\alpha \approx 0,156$ рад $\approx 9^\circ$, т. е. угол α мал. Высота $h_0 = R_3(1 - \cos \alpha) \approx R_3\alpha^2/2 \approx 80$ км. Длина хорды AB $L_0 \approx R\alpha = L$. Для разности хода лучей 1 и 2 имеем (учтем, что $h_1 + h_0$ и $h_2 + h_0 \ll L/2$)

$$\begin{aligned} x &= 2(\sqrt{(L/2)^2 + (h_0 + h_2)^2} - \sqrt{(L/2)^2 + (h_0 + h_1)^2}) \approx \\ &\approx 2L[(h_0 + h_2)^2/L^2 - (h_0 + h_1)^2/L^2] = \\ &= 2(h_2 - h_1)(2h_0 + h_1 + h_2)/L. \end{aligned}$$

Разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi x/\lambda = 2\pi f x/c$. В приемнике складываются колебания

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \cos(2\pi f t + \varphi_0), \\ a_2 &= a_0 \cos(2\pi f t + \varphi_0 + \Delta\varphi). \end{aligned}$$

Результирующее колебание

$$a = a_1 + a_2 = 2a_0 \cos(\Delta\varphi/2) \cos(2\pi f t + \varphi_0 + \Delta\varphi/2).$$

Амплитуда этого колебания $A_0 = 2a_0 \cos(\Delta\varphi/2)$, а интенсивность

$$I = A_0^2 = 4a_0^2 \cos^2 \left[\frac{2\pi f}{cL} (h_2 - h_1)(2h_0 + h_1 + h_2) \right].$$

Если L изменяется на величину l , малую по сравнению с L , изменение разности фаз между лучами 1 и 2

$$\delta\varphi \approx \frac{d(\Delta\varphi)}{dL} l = \frac{4\pi f}{L^2 c} (h_2 - h_1)(2h_0 + h_1 + h_2) l.$$

Изменение фазы на 2π определяет период изменения интенсивности. Соответствующее значение

$$l_0 = L^2 c / 2f (h_2 - h_1)(2h_0 + h_1 + h_2) \approx 180 \text{ м.}$$

Если обозначить это значение l_0 через Λ , а $4a_0^2$ — через I_0 , закон изменения интенсивности сигнала с расстоянием l запишется в виде $I = I_0 \cos^2(2\pi l/\Lambda)$.

4.193. а) Из-за дифракции на краях зеркала телескопа луч лазера постепенно расширяется, и на больших расстояниях его диаметр будет существенно превышать диаметр зеркала. Как известно из теории дифракции, угловая

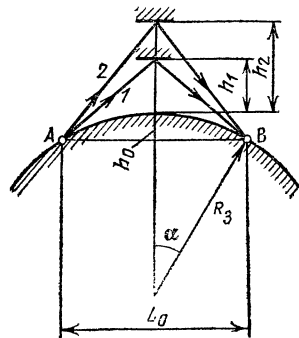


Рис. 4.145.

полуширина луча $\varphi \approx \lambda/D = 2,6 \cdot 10^{-7}$ рад $= 0,05''$. Точность установки оптической оси телескопа должна быть такой же — иначе отраженный луч не попадет обратно на телескоп.

б) Радиус светового пятна на Луне $R_1 = D/2 + \varphi L \approx \varphi L = 100$ м. Доля энергии, попадающей на отражатель, $k_1 = d^2/4R_1^2 = 10^{-6}$. Радиус луча, попадающего обратно на телескоп, $R_2 \approx L\lambda/d = 1,3$ км. Доля отраженной энергии, попадающей в телескоп, $k_2 = D^2/4R_2^2 = 10^{-6}$. Таким образом, доля энергии лазера, достигающая фотоприемника, $k_0 = k_1 k_2 = 10^{-12}$.

в) В зрачок невооруженного глаза после отражения от Луны попадает доля энергии лазера $k_{зр} = k_0 (d_{зр}/D)^2 = 3,7 \cdot 10^{-18}$. Число световых квантов, попадающих в зрачок, $N = k_{зр} E/h\nu = k_{зр} E\lambda/hc = 12$. Так как $N < n$, глаз отраженный сигнал не почувствует.

г) В отсутствие отражателя лунная поверхность рассеивает 10% энергии лазера равномерно в телесный угол 2π . Телесный угол, под которым видно зеркало телескопа с Луны, $\Omega = \pi D^2/4L^2$. Доля энергии лазера, попадающая в телескоп, в этом случае

$$k = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\pi D^2}{4L^2} = \frac{\alpha D^2}{8L^2} = 5 \cdot 10^{-19}.$$

Выигрыш за счет применения отражателя, таким образом, $\beta = k_0/k = 2 \cdot 10^9$.

Элементы квантовой оптики. Фотоэффект

4.194. Вся световая мощность точечного источника P_0 излучается в телесный угол 4π ; следовательно, в глаз, находящийся на расстоянии L от источника (рис. 4.146), попадает мощность $P = P_0 \Omega/4\pi = P_0 d_{зр}^2/16L^2$. Подсчитаем, какое число фотонов (квантов энергии) в

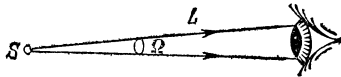


Рис. 4.146.

единицу времени попадает в глаз, находящийся на этом расстоянии. Энергия одного фотона $E = h\nu$, где h — постоянная Планка, ν — частота электромагнитного излучения.

Поскольку $\nu = c/\lambda$ (c — скорость света, λ — длина волны излучения), имеем $E = hc/\lambda$. Итак, в единицу времени в глаз попадает $n = P/E$ фотонов: $n = P_0 d_{зр}^2 \lambda / 16L^2 hc$. По условию глаз реагирует на свет, если $n > 60$ с $^{-1}$. Такое число фотонов попадает в глаз на расстоянии

$$L = \frac{d_{зр}}{4} \sqrt{\frac{P_0 \lambda}{nhc}} \approx 10^6 \text{ м} = 10^3 \text{ км}.$$

4.195. В отличие от предыдущей задачи, в этом случае свет распространяется не во все стороны, а в узком конусе с углом раствора α . При этом $L =$

$$= \frac{d_{зр}}{\alpha} \sqrt{\frac{P_0 \lambda}{nhc}} = 5 \cdot 10^8 \text{ км}.$$

$$4.196. A = h\nu_0 - eV_3 = 3,35 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,1 \text{ эВ}.$$

$$4.197. A = 2e(1,5V_1 - V_2) = 1,2 \text{ эВ} = 1,9 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

$$4.198. h = 5\lambda e \Delta V/c = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

4.199. Запишем уравнение Эйнштейна для обеих длин волн:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A + eV_1, \quad \frac{hc}{\lambda_2} = A + eV_2, \quad \text{откуда} \quad V_2 = V_1 + \frac{hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = 2,23 \text{ В}.$$

4.200. Согласно уравнению Эйнштейна, красная граница фотоэффекта определяет работу выхода A : $A = hc/\lambda_0$. При освещении ультрафиолетовым светом кинетическая энергия вылетевшего электрона $T = hc/\lambda - A = hc(1/\lambda - 1/\lambda_0)$. Эта энергия расходуется на работу против сил электрического поля: $T = eEl$, откуда

$$l = \frac{T}{eE} = \frac{hc}{eE} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = 1,5 \text{ см.}$$

4.201. Электроны, вылетевшие из катода под действием света, имеют все возможные направления скорости. На край пятна на аноде попадут электроны, вылетевшие с края пятна на катоде и имеющие при вылете скорость, направленную параллельно поверхностям катода и анода. Эта скорость находится из уравнения Эйнштейна:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A, \text{ откуда } v_0 = \left[\frac{2}{m} \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right) \right]^{1/2}.$$

Двигаясь равноускоренно по направлению к аноду, эти электроны проходят расстояние между катодом и анодом за время $t = (2l/a)^{1/2}$, их ускорение $a = eV/ml$ (так как катод и анод образуют плоский конденсатор). Таким образом, $t = l(2m/eV)^{1/2}$. За это время вдоль поверхности анода (и катода) электроны смещаются на расстояние $\Delta d = v_0 t$. Диаметр пятна на аноде

$$D = d + 2\Delta d = d + 4l \left(\frac{hc/\lambda - A}{eV} \right)^{1/2} \approx 1,3 \text{ мм.}$$

4.202. Коротковолновая граница рентгеновского спектра соответствует случаю, когда вся кинетическая энергия электрона переходит в излучение, т. е. $T = hc/\lambda_0$. Так как скорость электронов сравнима со скоростью света, расчет по нерелятивистской формуле $T = mv^2/2$ будет неточен. Более правильно в этом случае использовать релятивистскую формулу для кинетической энергии:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - m_0 c^2 \approx 7,4 \cdot 10^{-15} \text{ Дж.}$$

откуда $\lambda_0 = hc/T = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$

I		Периодическая система элементов Д.И.Менделеева									
1	[H]	II		III		IV		V			
2	Li ³ 6,941 ЛИТИЙ	Be ⁴ 9,01218 БЕРИЛЛИЙ	5 10,81 БОР	6 12,011 УГЛЕРОД	7 14,0067 АЗОТ						
3	Na ¹¹ 22,98977 НАТРИЙ	Mg ¹² 24,305 МАГНИЙ	13 26,98154 АЛЮМИНИЙ	14 28,0855 КРЕМНИЙ	15 30,97376 ФОСФОР						
4	K ¹⁹ 39,0983 КАЛИЙ	Ca ²⁰ 40,08 КАЛЬЦИЙ	Sc ²¹ 44,9559 СКАНДИЙ	Ti ²² 47,90 ТИТАН	V ²³ 50,9415 ВАНАДИЙ						
	29 63,546 Cu МЕДЬ	30 65,38 Zn ЦИНК	31 69,735 Ga ГАЛЛИЙ	32 72,59 Ge ГЕРМАНИЙ	33 74,9216 As МЫШЬЯК						
5	Rb ³⁷ 85,467 РУБИДИЙ	Sr ³⁸ 87,62 СТРОНЦИЙ	Y ³⁹ 88,9059 ИТТРИЙ	Zr ⁴⁰ 91,22 ЦИРКОНИЙ	Nb ⁴¹ 92,9064 НИОБИЙ						
	47 107,868 Ag СЕРЕБРО	48 112,41 Cd КАДМИЙ	49 114,82 In ИНДИЙ	50 118,69 Sn ОЛОВО	51 121,75 Sb СУРЬМА						
6	Cs ⁵⁵ 132,9054 ЦЕЗИЙ	Ba ⁵⁶ 137,33 БАРИЙ	La* ⁵⁷ 138,9055 ЛАНТАН	Hf ⁷² 178,49 ГАФИНИЙ	Ta ⁷³ 180,947 ТАНТАЛ						
	79 196,9665 Au ЗОЛОТО	80 200,59 Hg РУТУТЬ	81 204,37 Tl ТАЛЛИЙ	82 207,2 Pb СВИНЕЦ	83 208,9804 Bi ВИСМУТ						
7	Fr ⁸⁷ (223) ФРАНЦИЙ	Ra ⁸⁸ 226,0254 РАДИЙ	Ac** ⁸⁹ (227) АКТИНИЙ	Ku ¹⁰⁴ (260) КУРЧАТОВИЙ	105 (260)						

* ЛАНТАНОИДЫ

Ce ⁵⁸ 140,12 ЦЕРИЙ	Pr ⁵⁹ 140,9077 ПРАЗЕОДИМ	Nd ⁶⁰ 144,24 НЕОДИМ	Pm ⁶¹ (145) ПРОМЕТИЙ	Sm ⁶² 150,4 САМАРИЙ	Eu ⁶³ 151,96 ЕВРОПИЙ	Gd ⁶⁴ 157,25 ГАДОЛИНИЙ
-------------------------------------	---	--------------------------------------	---------------------------------------	--------------------------------------	---------------------------------------	---

** АКТИНОИДЫ

Th ⁹⁰ 232,0381 ТОРИЙ	Pa ⁹¹ 231,0359 ПРОТАКТИНИЙ	U ⁹² 238,029 УРАН	Np ⁹³ 237,0482 НЕПТУНИЙ	Pu ⁹⁴ (244) ПЛУТОНИЙ	Am ⁹⁵ (243) АМЕРИЦИЙ	Cm ⁹⁶ (247) КЮРИЙ
---------------------------------------	---	------------------------------------	--	---------------------------------------	---------------------------------------	------------------------------------

	VII		VIII		<div>Обозначение элемента</div> <div>Атомный номер</div> <div>Атомная масса</div> <div>Целое число в скобках — массовое число наиболее устойчивого радиоизотопа</div>
	1 1,0079 H ВОДОРОД	2 4,00260 He ГЕЛИЙ			
VI					
8 15,9994 O КИСЛОРОД	9 18,998403 F ФТОР	10 20,179 Ne НЕОН			
16 32,06 S СЕРА	17 35,453 Cl ХЛОР	18 39,948 Ar АРГОН			
Cr 51,996 ХРОМ	24 54,9380 Mn МАРГАНЕЦ	25 55,847 Fe ЖЕЛЕЗО	26 58,9332 Co КОБАЛЬТ	27 58,71 Ni НИКЕЛЬ	
34 78,96 Se СЕЛЕН	35 79,904 Br БРОМ	36 83,80 Kr КРИПТОН			
Mo 95,94 МОЛИБДЕН	42 98,9062 Tc ТЕХНЕЦИЙ	43 101,07 Ru РУТЕНИЙ	44 102,9055 Rh РОДИЙ	45 106,4 Pd ПАЛЛАДИЙ	
52 127,60 Te ТЕЛЛУР	53 126,9045 I ИОД	54 131,30 Xe КСЕНОН			
74 183,85 W ВОЛЬФРАМ	75 186,207 Re РЕНИЙ	76 190,2 Os ОСМИЙ	77 192,22 Ir ИРИДИЙ	78 195,09 Pt ПЛАТИНА	
84 (209) Po ПОЛОНИЙ	85 (210) At АСТАТ	86 (222) Rn РАДОН			
106 (263)					

Tb 65 158,9254 ТЕРБИЙ	Dy 66 162,50 ДИСПРОЗИЙ	Ho 67 164,9304 ГОЛЬМИЙ	Er 68 167,26 ЭРБИЙ	Tm 69 168,9342 ТУЛИЙ	Yb 70 173,04 ИТТЕРБИЙ	Lu 71 174,967 ЛЮТЕЦИЙ
-----------------------------	------------------------------	------------------------------	--------------------------	----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

Bk 97 (247) БЕРКЛИЙ	Cf 98 (251) КАЛИФОРНИЙ	Es 99 (254) ЭЙНШТЕЙНИЙ	Fm 100 (257) ФЕРМИЙ	Md 101 (258) МЕНДЕЛЕВИЙ	[No] 102 (259) (НОБЕЛИЙ)	[Lr] 103 (260) (ЛОУРЕНСИЙ)
---------------------------	------------------------------	------------------------------	---------------------------	-------------------------------	--------------------------------	----------------------------------

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Гравитационная постоянная	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$
Нормальное ускорение свободного падения	$g = 9,8 \text{ м}/\text{с}^2$
Скорость света в вакууме	$c = 299\,792,46 \text{ км}/\text{с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м}/\text{с}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн}/\text{м} = 12,6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}/\text{м}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}/\text{м}$
Масса покоя электрона протона	$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ $m_p = 1836 \quad m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Элементарный заряд	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Отношение заряда электрона к его массе	$e/m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл}/\text{кг}$
Постоянная Планка	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{Гц}$ $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Атомная единица массы	$1 \text{ а. е. м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Универсальная (молярная) газовая постоянная	$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}/\text{К}$
Постоянная Фарадея	$F = 96,5 \cdot 10^3 \text{ Кл}/\text{моль}$
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях ($T_0 = 273,15 \text{ К}$, $P_0 = 101\,325 \text{ Па} \approx 10^5 \text{ Па}$)	$V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$
Плотность воды льда ртути	$10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ $0,9 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ $13,6 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$
Температура кипения воды плавления льда	$100^\circ\text{C} = 373 \text{ К}$ $0^\circ\text{C} = 273 \text{ К}$
Удельная теплоемкость воды льда	$4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ $2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
Удельная теплота испарения воды плавления льда	$2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$ $0,32 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора	3	
	Задачи	Ответы и решения
I. МЕХАНИКА	5	141
Кинематика	5	141
Статика	8	144
Динамика	12	148
Работа. Мощность. Энергия	19	154
Законы сохранения энергии и импульса	22	158
Вращательное движение	27	163
Тяготение. Спутники	32	168
Применение законов механики в ядерной физике	34	173
II. ТЕПЛОТА	36	174
Тепловое расширение тел	36	174
Уравнение газового состояния	37	176
Газовые смеси	45	182
Гидроаэростатика	48	185
Закон сохранения энергии в тепловых процессах	56	192
Насыщенные и ненасыщенные пары	62	199
Элементы молекулярной и атомной физики	69	205
III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ	72	209
Электростатика	72	209
Закон Ома. Законы электролиза	78	215
Работа и мощность электрического тока. Закон Джоуля — Ленца	85	223
Нелинейные элементы в цепях постоянного тока	89	228
Заряженные частицы в электрическом и магнитном полях	94	231
Электромагнитная индукция. Переменный ток	101	236
IV. ОПТИКА	108	242
Отражение и преломление света	108	242
Тонкие линзы	114	250
Сферические зеркала	120	258
Оптические приборы	125	264
Фотометрия	129	270
Элементы волновой оптики	136	278
Элементы квантовой оптики. Фотоэффект	139	282
Периодическая система элементов Д. И. Менделеева	284	
Некоторые физические постоянные	286	

Людмила Павловна Б а к а н н а
Владимир Евгеньевич Б е л о н у ч к и н
Станислав Миронович К о з е л
Игорь Павлович М а з а н ь к о

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Под редакцией С. М. К о з е л а

Редактор Л. И. Г л а д н е в а
Технический редактор В. Н. К о н д а к о в а
Корректоры Л. И. Н а з а р о в а, Е. В. С и д о р к и н а

ИБ № 11811

Сдано в набор 12.04.83. Подписано к печати 31.10.83.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага кн.-журн. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Условн. печ. л. 18. Усл. кр.-отт. 18,25. Уч.-изд. л. 21,75.
Тираж 300 000 экз. Заказ № 887. Цена 75 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красно-
го Знамени Ленинградское производственно-техническое объ-
единение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзпо-
лиграфпрома при Государственном комитете СССР по де-
лам издательств, полиграфии и книжной торговли.
197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

